

1 – Partie liminaire : modèle semiclassique de polarisabilité

1 – $[p] = [\varepsilon_0 E][\alpha] = qL$ et $[\varepsilon_0 E/q] = L^{-2}$, d'où $[\alpha] = L^3$

2 – Le facteur 2 vient du fait qu'il s'agit de l'énergie potentielle mécanique d'un dipôle induit et non d'un dipôle permanent.

3 – $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$, donc $U_R = -\varepsilon_0 \alpha E^2/2$. Or l'intensité est proportionnelle au carré du champ électrique d'où $U_R \propto I$.

4 – τ représente la durée de vie moyenne dans l'état excité. La probabilité de rester dans l'état excité décroît exponentiellement avec le temps caractéristique τ .

5 –

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - m_e \frac{\vec{v}}{\tau} + (-e) E_L \cos(\omega t) \vec{u}_z.$$

6 – En notation complexe et sur l'axe z , l'équation du mouvement s'écrit

$$-m_e \omega^2 z = -m_e \omega_0^2 z - m_e \frac{i\omega}{\tau} z - e E_L,$$

d'où

$$p = (-e)z = \frac{e^2}{m_e \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} E_L.$$

7 –

$$\varepsilon_0 (\mathcal{R}e(\alpha) + i\mathcal{I}m(\alpha)) = \frac{e^2}{m_e \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}$$

soit

$$\mathcal{R}e(\alpha) = \frac{e^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \text{ et } \mathcal{I}m(\alpha) = \frac{e^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{-\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}.$$

8 – En complexe,

$$\vec{p} = \varepsilon_0 E_L (\mathcal{R}e(\alpha) + i\mathcal{I}m(\alpha)) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \vec{u}_z.$$

d'où

$$\mathcal{R}e(\vec{p}) = \varepsilon_0 E_L (\mathcal{R}e(\alpha) \cos(\omega t) - \mathcal{I}m(\alpha) \sin(\omega t)) \vec{u}_z.$$

9 –

$$U_R = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{\varepsilon_0 E_L^2}{2} (\mathcal{R}e(\alpha) \cos^2(\omega t) - \mathcal{I}m(\alpha) \sin(\omega t) \cos(\omega t))$$

10 –

$$U = \langle U_R \rangle = -\frac{\varepsilon_0 E_L^2}{2} \frac{\mathcal{R}e(\alpha)}{2}.$$

En tenant compte de la relation $E_L^2 = 2I/\varepsilon_0 c$, et en reportant l'expression de $\mathcal{R}e(\alpha)$, il vient

$$U = -\frac{I \mathcal{R}e(\alpha)}{2c} = -\frac{e^2}{4m_e \varepsilon_0 c} \frac{2I}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}.$$

11 – Pour $\lambda = 852 \text{ nm}$, $\mathcal{R}e(\alpha) = 3,37 \times 10^{-27} \text{ m}^3$. Pour $\lambda = 1064 \text{ nm}$, $\mathcal{R}e(\alpha) = 1,18 \times 10^{-27} \text{ m}^3$.

12 – $v \sim r\omega \sim p\omega/q \sim (\varepsilon_0 \mathcal{R}e(\alpha) E_L) \omega/q \sim 10^3 \text{ m/s} \ll c$ avec $E_L = (2I/\varepsilon_0 c)^{1/2}$. L'hypothèse de mouvement non relativiste est donc justifiée pour une intensité de 10^{10} W/m^2 .

13 – La force liée au champ magnétique de l'onde plane est négligeable car $v \ll c$. Par ailleurs la contribution de la dépendance spatiale de la phase est négligée ce qui présuppose que $k \times$ (le déplacement de l'électron) $\ll 1$. Le déplacement de l'électron est d'une fraction de rayon de Bohr, pour une longueur d'onde optique cette condition est donc réalisée.

2 – Miroir de Bragg

2.1. La diffraction de Bragg

14 – La diffraction de rayons X par un cristal a été découverte au début du XX ième siècle par Max von Laue (prix Nobel 1914). La contribution de William Lawrence Bragg (australien) et William Henry Bragg (anglais) sur la diffusion de rayonnement X par un cristal a été majeure. Ils se voient attribuer le prix Nobel de physique 1915 leurs travaux sur ce sujet.

15 – $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = [IJK] = 2d \sin \theta$.

16 – Il y a interférence constructive entre les rayons (1) et (2) si $k(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) = 2\pi n$ où n est un entier non nul avec $k = 2\pi/\lambda$. On en déduit une série discrète d'angles θ_n qui réalisent cette condition : $2d \sin \theta_n = n\lambda$.

17 – Le signal diffracté donne la transformée de Fourier du réseau et permet par suite d'obtenir une information sur l'agencement des atomes dans la structure cristalline. Le signal observé à une échelle macroscopique donne une information sur un agencement microscopique et joue par suite le rôle d'un microscope, c'est-à-dire d'une sonde du "monde microscopique".

18 – $\hbar k = h/\lambda$.

19 – Dire qu'il y a une réflexion spéculaire (sans changement de longueur d'onde) revient à dire que les impulsions incidente et diffusée du photon sont égales $\|\vec{p}_i\| = \|\vec{p}_f\| = p$. Le transfert d'impulsion transverse s'écrit $\Delta\vec{p}_\perp = \vec{p}_f - \vec{p}_i$. On en déduit $\sin \theta = \Delta p_\perp / (2p)$. En écrivant que $\sin \theta_n = n\lambda / (2d)$, il vient $\Delta p_\perp = np\lambda / d = n\hbar k_d$ avec $k_d = 2\pi/d$.

20 – La diffraction de Bragg d'ondes électroniques a été observée en 1927 par Clinton Joseph Davisson et Lester Germer, et indépendamment par George Paget Thomson. Davisson et Thomson se verront attribuer le prix Nobel de Physique 1937 pour cette découverte.

21 – La distance entre deux atomes d'une maille cristalline est de l'ordre de $d = 2\text{Å}$. La relation de Bragg montre qu'il faut que la longueur d'onde du rayonnement incident soit de l'ordre de grandeur de la taille du motif à sonder. En l'occurrence, il s'agit de la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = h/p$. Faisons l'hypothèse d'électrons non relativistes, $p = m_e v$. Nous obtenons une vitesse

$$v = \frac{h}{m_e d} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{9,1 \times 10^{-31} \cdot 2 \times 10^{-10}} \sim 3,6 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1},$$

soit une énergie cinétique incidente de $m_e v^2 / 2 = 37 \text{ eV}$ (l'hypothèse non relativiste est par suite bien vérifiée).

22 – La diffraction de Bragg d’atomes d’hélium a été observée dès 1930 par Immanuel Esterman et Otto Stern sur la surface d’un cristal de LiF. Cette expérience a montré que le concept de longueur d’onde de de Broglie pouvait être associé à un objet composite et pas seulement à des particules élémentaires. Le motif périodique sondé dans cette expérience est essentiellement celui de la surface car ces atomes ne peuvent pas pénétrer la matière comme peut le faire a priori un électron.

23 – La diffraction de Bragg a été utilisée pour découvrir la forme en hélice de l’ADN (Prix Nobel de médecine 1962 attribué à Francis Crick, James Watson et Maurice Wilkins) ou encore plus récemment l’existence de quasi-cristaux, découverte qui a valu à son auteur (Dan Shechtman) le prix Nobel de chimie 2011.

2.2. Miroir de Bragg optique

24 – Les miroirs métalliques ont une réflectivité maximale en incidence normale de l’ordre de 97 %. Elle n’est pas plus élevée du fait de la conductivité non nulle des métaux. L’onde incidente produit en effet des courants au voisinage de la surface qui se dissipent par effet Joule en énergie thermique.

25 – La bande passante des miroirs métalliques est très grande. Un miroir métallique dispose d’une réflectivité supérieure à 96 % de 500 nm à 20 μm !

26 – Une cavité est caractérisée par son facteur de qualité. Ce dernier est d’autant plus grand que les pertes sont petites. En pratique, on utilise des miroirs diélectriques disposant d’un coefficient de réflectivité très important ($> 99,9\%$) pour la longueur d’onde concernée.

27 – Des miroirs métalliques sphériques ont été utilisés au XIX ième siècle dans des télescopes pour éviter l’aberration chromatique des lentilles en verre.

Propagation d’une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique

28 – Propagation dans le sens des z croissants.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \implies -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \implies \vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y.$$

29 – $k = 2\pi n / \lambda_0$.

30 – E_- propagation vers les z croissants et E_+ vers les z décroissants.

31 –

$$B_- = \frac{k}{\omega} E_- = \frac{n}{c} E_- \quad ; \quad B_+ = -\frac{k}{\omega} E_+ = -\frac{n}{c} E_+.$$

Matrice d’interface diélectrique

32 – Les grandeurs vectorielles continues lorsque l’onde franchit l’interface sont la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique. La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique s’exprime en fonction du courant surfacique. La discontinuité de la composante normale du champ électrique s’exprime en fonction de la densité surfacique de charge.

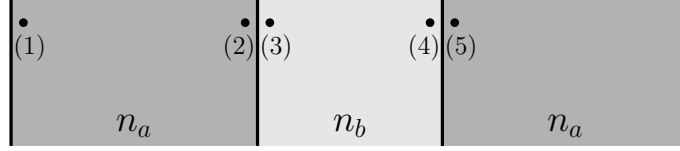


FIGURE 1 – Notations

33 –

$$\begin{aligned} E_{-,a} + E_{+,a} &= E_{-,b} + E_{+,b} \\ n_a E_{-,a} - n_a E_{+,a} &= n_b E_{-,b} - n_b E_{+,b} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_a & -n_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{-,a} \\ E_{+,a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_b & -n_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{-,b} \\ E_{+,b} \end{pmatrix}$$

D'où

$$I_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/n_a \\ 1 & -1/n_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_b & -n_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_b/n_a & 1 - n_b/n_a \\ 1 - n_b/n_a & 1 + n_b/n_a \end{pmatrix}$$

34 – Immédiat. La relation $(I_{ab})^{-1} = I_{ba}$ traduit la symétrie $a - b$ du problème ou encore celle de l'invariance des lois de l'électromagnétisme par symétrie par rapport à un plan.

35 –

$$\det(I_{ab}) = \frac{1}{\tau_{ab}^2} (1 - \rho_{ab}^2) = \frac{n_b}{n_a}$$

Matrice de propagation de l'onde électromagnétique

36 – $\tilde{E}_{+,b} = e^{i\varphi_b} E_{+,b}$ et $\tilde{E}_{-,b} = e^{-i\varphi_b} E_{-,b}$ avec $\varphi_b = k_0 n_b b$, d'où

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{-,b} \\ \tilde{E}_{+,b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_b} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{-,b} \\ E_{+,b} \end{pmatrix} \quad (2)$$

37 – $\det P_b = 1$.

La matrice du motif périodique du miroir de Bragg optique

38 – Pour les notations voir figure 1, on en déduit

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{-,5} \\ \tilde{E}_{+,5} \end{pmatrix} = I_{54} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{-,4} \\ \tilde{E}_{+,4} \end{pmatrix} = I_{54} P_b I_{32} P_a \begin{pmatrix} \tilde{E}_{-,1} \\ \tilde{E}_{+,1} \end{pmatrix},$$

soit $\Sigma = I_{ab} P_b I_{ba} P_a$.

39 – $\det(\Sigma) = \det(I_{ab}) \det(P_b) \det(I_{ba}) \det(P_a) = 1$.

40 –

$$\begin{aligned} I_{ba} P_a &= \frac{1}{\tau_{ba}} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_a} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_a} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_{ba}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_a} & \rho e^{i\varphi_a} \\ \rho e^{-i\varphi_a} & e^{i\varphi_a} \end{pmatrix} \\ I_{ab} P_b &= \frac{1}{\tau_{ab}} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_b} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_b} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_{ab}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_b} & -\rho e^{i\varphi_b} \\ -\rho e^{-i\varphi_b} & e^{i\varphi_b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\Sigma = I_{ab}P_bI_{ba}P_a = \frac{1}{\tau_{ab}\tau_{ba}} \begin{pmatrix} e^{-i(\varphi_a+\varphi_b)} - \rho^2 e^{i(\varphi_b-\varphi_a)} & \dots \\ \dots & e^{i(\varphi_a+\varphi_b)} - \rho^2 e^{-i(\varphi_b-\varphi_a)} \end{pmatrix}$$

41 – Les valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 - \text{Tr}(\Sigma)\lambda + \det(\Sigma) = 0$ avec $\det(\Sigma) = 1$ et

$$\text{Tr}(\Sigma) = \frac{2}{\tau^2} \left(\cos(\varphi_a + \varphi_b) - \rho^2 \cos(\varphi_a - \varphi_b) \right).$$

42 – $S_N = \Sigma^N = T^{-1}DTT^{-1}DT\dots = T^{-1}D^N T$.

43 –

$$\begin{pmatrix} E_{-,4N+1} \\ E_{+,4N+1} \end{pmatrix} = S_N \begin{pmatrix} E_{-,1} \\ E_{+,1} \end{pmatrix}.$$

On écrit qu'il n'y a pas d'onde qui vient de la gauche en sortie $E_{+,4N+1} = 0$, $E_{-,4N+1} = tE_0$, $E_{-,1} = E_0$ et $E_{+,1} = rE_0$. Il vient

$$\begin{pmatrix} E_{-,1} \\ E_{+,1} \end{pmatrix} = S_N^{-1} \begin{pmatrix} tE_0 \\ 0 \end{pmatrix} = tE_0 \begin{pmatrix} (S_N^{-1})_{11} \\ (S_N^{-1})_{21} \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} 1 = t(S_N^{-1})_{11} \\ r = t(S_N^{-1})_{21} \end{matrix}.$$

D'où le résultat car $R_N = |r|^2$.

44 – A l'évidence $\tilde{\varphi}_a = \pi/2$ modulo π et $\tilde{\varphi}_b = \pi/2$ modulo π , et donc

$$\int_0^{a+b} k(x)dx = \pi \text{ modulo } \pi$$

Cette intégrale représente la phase cumulée sur un motif. Par rapport à l'expérience de Bragg, $\theta = \pi/2$, de sorte que $2d = n\lambda$. Par suite la phase cumulée s'écrit $kd = (2\pi/\lambda)d = n\pi = \pi \text{ modulo } \pi$. La condition que nous retrouvons est celle de Bragg d'où le nom miroir de Bragg pour ces empilements de bicouches.

45 – $S_N^{-1} = T^{-1}D^{-N}T$, d'où

$$R_N = \left| \frac{(1+\rho)^{2N} - (1-\rho)^{2N}}{(1+\rho)^{2N} + (1-\rho)^{2N}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^{2N}} \right|^2.$$

46 – $R_{40} = 0,99987$. Les épaisseurs minima sont $a = \lambda_0/(4n_a) = 86 \text{ nm}$ et $b = \lambda_0/(4n_b) = 76 \text{ nm}$.

47 – Notons $\varphi = \varphi_a = \varphi_b$. L'inégalité vérifiée par φ s'écrit

$$|\cos^2 \varphi - x \sin^2 \varphi| \geq 1$$

avec $x > 1$ car $n_a \neq n_b$. Cette équation ne peut être vérifiée pour toutes les valeurs de φ , ce qui est à l'origine de la structure de bande en fréquence. Regardons les bords. Pour $C = 1$, on trouve $x = -1$ ce qui n'a pas de sens. Pour $C = -1$, on trouve

$$\cos^2 \varphi = \frac{x-1}{1+x} = \frac{(n_b - n_a)^2}{(n_b + n_a)^2}.$$

Notons $\varphi_+ = \text{Arccos}((n_b - n_a)/(n_a + n_b))$. La largeur en φ s'écrit $\Delta\varphi = 2|\pi/2 - \varphi_+|$. Or $\varphi = kn_a a = \pi\tilde{\lambda}/(2\lambda)$, d'où

$$\Delta\lambda = \frac{2\tilde{\lambda}}{\pi}\Delta\varphi = \frac{4\tilde{\lambda}}{\pi} \left(\pi/2 - \left| \text{Arccos} \left(\frac{n_b - n_a}{n_a + n_b} \right) \right| \right).$$

2.3. Réseau optique pour des atomes

Diffusion quantique sur un puits de potentiel carré

48 – Dans le cas classique la particule a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0 dans les régions I et III et de vitesse $(v_0^2 + 2V_0/m)^{1/2}$ plus grande dans la région II.

49 – L'onde incidente a une énergie $E > 0$. Il s'agit d'une recherche d'états stationnaires. L'équation aux valeurs propres s'écrit ici

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - V)\psi.$$

Comme le potentiel est constant dans les trois régions, les états stationnaires correspondent bien à des ondes planes. Une fois ces états connus, on peut naturellement connaître l'évolution d'un paquet d'ondes par linéarité de l'équation comme la somme en amplitude d'ondes planes.

50 – $V = 0$ dans la région I. La relation $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ donne des ondes planes en $\exp(\pm ikx)$.

51 –

$$\psi_{\text{II}}(x) = ae^{i\kappa x} + be^{-i\kappa x}.$$

52 – Continuité de ψ et de sa dérivée en $x = 0$ et $x = L$. La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée se démontrent à partir de l'équation aux valeurs propres (équation du deuxième ordre). La continuité de la dérivée traduit la continuité du flux de probabilité qui s'exprime grâce au courant de probabilité

$$j(x) = \frac{\hbar}{2mi} \psi^* \frac{d}{dx} \psi + c.c.$$

53 –

$$\begin{aligned} 1 + r &= a + b \\ 1 - r &= \frac{\kappa}{k}(a - b) \\ te^{ikL} &= ae^{i\kappa L} + be^{-i\kappa L} \\ \frac{k}{\kappa} te^{ikL} &= ae^{i\kappa L} - be^{-i\kappa L} \end{aligned}$$

54 – $|r|^2 + |t|^2 = 1$ traduit la conservation du courant probabilité de présence.

55 – Si $E \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ et κ reste fini. La deuxième équation donne $a - b = (k/\kappa)(1 - r) = 0$, la dernière équation donne $a \sin(\kappa L) = 0$, soit en utilisant l'hypothèse du texte, on obtient $a = b = 0$. La première équation donne alors $1 + r = 0$.

56 – Cette réflexion de l’onde lorsqu’elle aborde un puits de potentiel n’a pas d’équivalent classique, il s’agit d’un phénomène de réflexion quantique. L’effet tunnel à travers une barrière de potentiel constitue un autre phénomène de nature ondulatoire pour lequel il n’y a pas d’équivalent classique.

57 – Dans le cas d’un potentiel de dérivée continue la réflexion quantique prend place lorsque

$$\left| \frac{d\lambda_{dB}(x)}{dx} \right| \gg 1$$

où $\lambda_{dB}(x) = h/mv(x)$ avec la vitesse ”locale” $v(x)$ donnée par la conservation de l’énergie $v_0^2 = v^2(x) + 2V(x)/m$.

Diffusion quantique sur des puits de potentiel sinusoïdaux

58 – C’est le phénomène de réflexion quantique que nous venons de voir.

59 – Ces zones discrètes de transmission parfaite (bandes noires) correspondent à l’entrée de nouveaux états liés dans le potentiel, il s’agit d’un effet d’accord de phase de type Fabry-Perot.

60 – A haute vitesse, il y a une transmission unité, les effets quantiques à haute énergie sont gommés. On retrouve la limite classique de transmission.

61 – Les états propres ont une parité bien définie par rapport au centre de symétrie du potentiel. Lorsqu’on couple (par effet tunnel) deux puits de potentiel, les deux niveaux fondamentaux de chaque puits de même énergie en l’absence de couplage vont donner lieu à deux niveaux distincts. Le niveau de plus basse énergie (niveau fondamental du double puits) correspond à une fonction d’onde paire, et l’autre niveau de ce doublet à savoir le premier état excité du double puits correspond à une fonction d’onde impaire.

62 – On retrouve le phénomène de réflexion quantique. Il y a deux fois plus de langues de transmission, correspondant à la levée de dégénérescence des niveaux des puits individuels sous l’effet du couplage tunnel.

63 – Idem que pour le cas à un seul puits les effets quantiques de réflexion sont gommés à haute énergie. Pour autant les langues ”blanches” sont plus longues traduisant un effet dû à la présence du double puits, il s’agit d’un effet d’interférences constructives qui amplifie la réflexion quantique.

64 – La réponse est négative. Grâce au formalisme de la supersymétrie appliquée à la mécanique quantique il est par exemple possible d’exhiber des potentiels qui ont les mêmes coefficients de transmission $T = |t|^2$ pour toutes les énergies et qui sont différents.

65 – Si on fixe une profondeur donnée, deux cas de figures se présentent.

Cas 1 : Soit U_0 et v correspondent à un point d’une bande blanche auquel cas la particule est réfléchi. On remarque que ces bandes blanches sont d’autant plus prononcées qu’il y a un grand nombre de puits. Par suite il faut que la particule pénètre significativement dans le réseau avant d’être réfléchi sinon elle ne se ”rend” pas compte de l’effet d’interférences constructives des puits successifs à l’origine de cette zone de réflexion partielle.

Cas 2 : Le point (U_0, v) correspond à une zone noire et la particule continue sa propagation dans le réseau.

66 – Ici on arrive perpendiculairement au motif périodique, $\theta = \pi/2$, d'où $2d = n\lambda$ avec $\lambda = h/mv$, il vient $v_n = nv_R/2$ avec $v_R = h/md$. A faible profondeur de potentiel, nous avons une réflexion de Bragg des ondes de matière.

Mise en oeuvre expérimentale : le réseau

67 –

$$\begin{aligned} \|\vec{E}_T(\vec{r}, t)\|^2 &= E_0^2 \left(\cos^2(\phi_1 - \omega t) + \cos^2(\phi_2 - \omega t) + 2 \cos(\phi_1 - \omega t) \cos(\phi_2 - \omega t) \right) \\ &= E_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\phi_1 - 2\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\phi_2 - 2\omega t) + \cos(\phi_1 + \phi_2 - 2\omega t) + \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) \end{aligned}$$

68 –

$$\langle \|\vec{E}_T(\vec{r}, t)\|^2 \rangle = E_0^2 (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2))$$

69 –

$$\begin{aligned} U_0(x) &= -\zeta I(x) = -\zeta I_0 (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) . \\ \phi_1 - \phi_2 &= -2k \sin(\theta/2)x \equiv -2\pi x/d \end{aligned}$$

où $d = \lambda/[2 \sin(\theta/2)]$ est la période spatiale.

70 – $d = 656$ nm.

71 –

$$v_R = \frac{h}{md} = 7 \text{ mm/s}, \quad E_R = 3,5 \times 10^{-30} \text{ J}, \quad E_R/k_B = 255 \text{ nK}.$$

Refroidissement par évaporation

72 – Dans les années 80.

73 – Claude Cohen-Tannoudji, Steven Chu, William Phillips, lauréats du prix Nobel de physique 1997.

74 – Théorème d'équipartition 6 degrés de liberté quadratique par atome (énergie cinétique + énergie potentielle), $E = N \times 6(k_B T/2) = 3Nk_B T$.

75 – Energie totale est égale à

$$E - dE = E - dN(\eta + \kappa)k_B T$$

76 –

$$3(N - dN)k_B(T - dT) = E - dE = 3Nk_B T - dN(\eta + \kappa)k_B T,$$

soit au premier ordre

$$\frac{dT}{T} = \alpha \frac{dN}{N}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\eta + \kappa}{3} - 1.$$

77 – résultat immédiat par intégration.

78 – $\alpha > 0$ la perte d'atomes correspond à une diminution de la température. En effet, on enlève les atomes qui ont plus d'énergie que l'énergie moyenne sachant que l'énergie moyenne définit la température. En rethermalisant après la perte de ces atomes énergétiques la température du gaz confiné diminue.

79 – $\alpha \sim 1$. Si le nombre d'atomes est divisé par 1000, la température également soit 200 nK.

80 – $T \propto (\Delta v)^2$, d'où $(\Delta v)_f/(\Delta v)_i \sim (N_f/N_i)^{1/2} \sim 1/32$.

81 – Le système global est constitué des N atomes initiaux. On abaisse la température d'un sous-ensemble de ce système au prix d'une perte d'information sur les autres atomes. L'entropie de l'ensemble constitué des N atomes augmente mais celle du sous-système constitué des atomes qui restent confinés diminue.

Mise en oeuvre expérimentale : lancement magnétique

82 – moment magnétique = courant \times surface. Estimation avec les paramètres de l'hydrogène.

$$\begin{aligned} \text{surface} &= \pi a_B^2 \\ \text{courant} &= \text{charge élémentaire de l'électron} / \text{période de rotation autour du noyau} \end{aligned} \quad (3)$$

Or $v = \alpha c$ d'après l'énergie du Rydberg la vitesse sur l'orbite de Bohr, d'où

$$\begin{aligned} \text{courant} &= \frac{e}{2\pi a_B/v} \\ \text{moment magnétique} &= \frac{ea_B v}{2} = \frac{e\hbar}{2m_e} \end{aligned} \quad (4)$$

83 – Le pompage optique dont l'idée revient à Alfred Kastler, prix Nobel de physique 1966.

84 – On peut simplement faire parcourir une bobine par un courant I pendant τ . Le champ le long de l'axe de la bobine présente un gradient. En revanche on ne peut pas avoir un gradient que dans une seule direction car le champ magnétique obéit à $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

85 – L'accélération est donnée par $a = \mu b/m$. On veut $v = v_R = a\tau$, d'où

$$\tau = \frac{mv_R}{\mu b} = 730 \text{ } \mu\text{s}.$$

Diffusion sur un réseau en présence d'une enveloppe

86 – Pour focaliser un faisceau laser à la limite de diffraction $w \sim d$ il faut disposer d'une grande ouverture numérique. Ce n'est pas le cas d'après l'énoncé. On a par suite $w \gg d$.

87 – L'inégalité $w \gg d$ permet de raisonner à l'aide des diagrammes en présence d'une enveloppe carrée locale. Lorsqu'un atome pénètre dans le réseau, la profondeur augmente, il est au début transmis. A partir d'une certaine profondeur il pénètre dans une zone blanche (interdite) d'après la figure 6c et il est réfléchi.

88 – Pour un atome de plus grande vitesse, les zones blanches sont de plus petite taille. L'atome passe rapidement et a une probabilité non nulle de continuer sa trajectoire. C'est en fait un phénomène d'onde évanescente ou d'effet tunnel. L'onde de matière ne peut pas se propager (vecteur d'onde imaginaire) mais garde une probabilité non nulle de transmission.

89 – Pour $U_0 \sim E_R$, $v_g \sim 0.7v_R$ et une largeur de $\Delta v \sim 0.1v_R$. La partie haute vitesse du paquet est réfléchi, et la partie basse vitesse est transmise.

90 – Pour $U_0 \sim E_R$, $v_g \sim v_R/2$ et une largeur de $\Delta v \sim 0.1v_R$. La partie basse vitesse du paquet est réfléchi, et la partie haute vitesse est transmise.

91 – Si on se place entre deux dents à $v_g \sim 3v_R/4$ par exemple et si le paquet d'onde $\hat{\psi}$ a une largeur plus grande que v_R , on réalise un filtre passe-bande pour ce paquet d'ondes.

92 – Le filtre passe-haut s'obtient très facilement classiquement, il suffit d'une "montagne" de potentiel suffisamment haute par rapport aux caractéristiques du paquet d'ondes incident.

3 – Ondes de matière guidées

3.1. Gaz de Bose dans un potentiel harmonique isotrope

93 – On somme le nombre d'électrons, protons et neutrons. Si ce nombre est pair il s'agit d'un boson, sinon c'est un fermion. $^1\text{H} = 1\text{p} + 1\text{e} = 2 = \text{boson}$. $^3\text{He} = 2\text{p} + 1\text{n} + 2\text{e} = 5 = \text{fermion}$ et $^4\text{He} = 2\text{p} + 2\text{n} + 2\text{e} = 6 = \text{boson}$.

94 – L'hamiltonien $H = H_x + H_y + H_z$ correspond à la somme de trois oscillateurs harmoniques indépendants selon les trois directions de l'espace. Si $|\Psi_{n_x}\rangle$ est le ket propre de H_x pour la valeur propre $(n_x + 1/2)\hbar\omega$, $H_x|\Psi_{n_x}\rangle = (n_x + 1/2)\hbar\omega|\Psi_{n_x}\rangle$. Les kets propres de H sont de la forme $|\Psi_{n_x}\rangle \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes |\Psi_{n_z}\rangle$ où le symbole \otimes désigne le produit tensoriel.

$$\begin{aligned} (H_x + H_y + H_z)|\Psi_{n_x}\rangle \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes |\Psi_{n_z}\rangle &= (H_x|\Psi_{n_x}\rangle) \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes |\Psi_{n_z}\rangle \\ &\quad + |\Psi_{n_x}\rangle \otimes (H_y|\Psi_{n_y}\rangle) \otimes |\Psi_{n_z}\rangle \\ &\quad + |\Psi_{n_x}\rangle \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes (H_z|\Psi_{n_z}\rangle) \\ &= ((n_x + 1/2)\hbar\omega|\Psi_{n_x}\rangle) \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes |\Psi_{n_z}\rangle \\ &\quad + |\Psi_{n_x}\rangle \otimes ((n_y + 1/2)\hbar\omega|\Psi_{n_y}\rangle) \otimes |\Psi_{n_z}\rangle \\ &\quad + |\Psi_{n_x}\rangle \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes ((n_z + 1/2)\hbar\omega|\Psi_{n_z}\rangle) \\ &= (n_x + 1/2 + n_y + 1/2 + n_z + 1/2)|\Psi_{n_x}\rangle \otimes |\Psi_{n_y}\rangle \otimes |\Psi_{n_z}\rangle. \end{aligned}$$

95 – Pour n fixé, il y a $n + 1$ choix pour n_x , puis pour n et n_x fixés, il y a $n - n_x + 1$ choix :

$$g(n) = \sum_{n_x=0}^n (n - n_x + 1) = n(n + 1) - \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 = (n + 1)(n + 2)/2.$$

96 –

$$\nu(\{n\}; T, \mu) = \frac{1}{\tilde{z}^{-1}e^{\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)/k_B T} - 1}.$$

97 – $N_0 = \tilde{z}/(1 - \tilde{z})$.

98 – Par définition $\tilde{z} > 0$. Le dénominateur de $\nu(\{n\})$ doit être positif quel que soit n_i , ce qui donne $\tilde{z} < 1$.

99 – La limite $\tilde{z} \ll 1$ est la limite classique pour laquelle on retrouve la distribution de Boltzmann :

$$\nu(\{n\}; T, \mu) \simeq \tilde{z}e^{-\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)/k_B T} \propto e^{-\varepsilon_{n_x, n_y, n_z}/k_B T}.$$

100 –

$$N' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{\tilde{z}^{-1}e^{\beta n \hbar \omega} - 1},$$

où $\beta = 1/k_B T$.

101 –

$$N' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{\tilde{z}^{-1} e^{\beta n \hbar \omega} - 1} = \int_0^{\infty} \frac{u^2}{2} \frac{1}{\tilde{z}^{-1} e^{u \tilde{x}} - 1} du. \quad (5)$$

La variable u remplace la variable discrète n qui varie de 1 à l'infini. Dans l'approximation semiclassique $\tilde{x} \ll 1$, l'intégrale est convergente vers \tilde{x} proche de zéro, on peut donc approximer la borne inférieure \tilde{x} par zéro.

102 –

$$\begin{aligned} N' &= \frac{1}{2\tilde{x}^3} \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{e^{u/\tilde{z}} - 1} = \frac{1}{2\tilde{x}^3} \int_0^{\infty} u^2 \tilde{z} e^{-u} \left(\frac{1}{1 - \tilde{z} e^{-u}} \right) du. \\ N' &= \frac{1}{2\tilde{x}^3} \int_0^{\infty} u^2 \tilde{z} e^{-u} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{z}^p e^{-pu} \right) du = \frac{1}{2\tilde{x}^3} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{z}^p \int_0^{\infty} u^2 e^{-pu} du. \\ N' &= \frac{1}{\tilde{x}^3} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^p}{p^3} = \frac{g_3(\tilde{z})}{\tilde{x}^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

103 – $g_3(\tilde{z})$ est une fonction croissante de \tilde{z} sur l'intervalle $[0; 1]$, donc $\tilde{z}^* = 1$.

104 –

$$N'_{\max}(T) = \frac{g_3(1)}{\tilde{x}^3} = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1)$$

105 – On doit toujours avoir $N'_{\max}(T) < N$. Soit T_c défini pour l'égalité $N'_{\max}(T_c) = N$. Il vient

$$k_B T_c = \hbar \omega \left(\frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad N'_{\max}(T) = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^3.$$

106 – $k_B T_c / (\hbar \omega) \sim N^{1/3} \gg 1$. C'est tout l'aspect remarquable du phénomène de condensation de Bose-Einstein, la température critique est très supérieure à l'espacement entre niveaux successifs et en dépit de ce fait, une fraction macroscopique d'atomes se cumule dans l'état fondamental. La condensation n'a donc rien à voir avec l'inhibition de l'excitation thermique du premier état excité lorsque l'énergie thermique est faible en regard de l'écart entre les niveaux d'énergie.

107 – On reprend l'expression précédente de N' en fonction de la température T , et on écrit $N = N_0 + N'$, il en résulte

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3.$$

3.2. Gaz de Bose dans un confinement anisotrope

108 – La fonction d'onde pour l'espace de Hilbert complet s'écrit $|\psi\rangle = |\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle$ avec $H_{\perp} = E_{\perp} |\psi_{\perp}\rangle$ et $H_{\parallel} |\psi_{\parallel}\rangle = E_{\parallel} |\psi_{\parallel}\rangle$.

$$\begin{aligned} H|\psi\rangle &= H|\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle = H_{\perp} |\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle + H_{\parallel} |\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle \\ &= |\psi_{\parallel}\rangle \otimes (H_{\perp} |\psi_{\perp}\rangle) + (H_{\parallel} |\psi_{\parallel}\rangle) \otimes |\psi_{\perp}\rangle \\ &= E_{\perp} |\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle + E_{\parallel} |\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle \\ &= (E_{\perp} + E_{\parallel}) (|\psi_{\parallel}\rangle \otimes |\psi_{\perp}\rangle) \\ &= (E_{\perp} + E_{\parallel}) |\psi\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

109 –

$$\varepsilon_{n_x, n_y} = \hbar\omega + \hbar\omega(n_x + n_y).$$

110 –

$$\frac{p_z^2}{2m}|\psi_{\parallel}\rangle = E_{\parallel}|\psi_{\parallel}\rangle \implies -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{\parallel}(z)}{dz^2} = E_{\parallel}\psi_{\parallel}(z) \implies \frac{d^2\psi_{\parallel}(z)}{dz^2} + k^2\psi_{\parallel}(z) = 0.$$

111 – $\psi_{\parallel}(z) = Ae^{ikz}$ et $\psi_{\parallel}(0) = \psi_{\parallel}(L)$ d'où $k_{n_z}L = 2\pi n_z$ avec n_z un entier relatif. $\int_0^L |\psi_{\parallel}(z)|^2 dz = 1 \implies A = 1/\sqrt{L}$.

112 –

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 k_{n_z}^2}{2m} + \hbar\omega + \hbar\omega(n_x + n_y).$$

113 –

$$\begin{aligned} N' &= \sum_{k_{n_z}} \frac{1}{\tilde{z}^{-1} e^{\beta\hbar^2 k_{n_z}^2/2m} - 1} = \sum_{k_{n_z}} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{z}^p e^{-p\beta\hbar^2 k_{n_z}^2/2m} = \frac{L}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{z}^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\beta\hbar^2 k^2/2m} dk \\ &= \frac{L}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{z}^p \frac{\sqrt{\pi}}{\hbar} \frac{\sqrt{2mk_B T}}{\sqrt{p}} = \frac{L}{\lambda} g_{1/2}(\tilde{z}), \end{aligned} \quad (8)$$

avec $\lambda = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$.

$g_{1/2}(\tilde{z} \rightarrow 1) \rightarrow \infty$ et par ailleurs $g_{1/2}(\tilde{z}) > 0$, d'où $0 < g_{1/2}(\tilde{z}) < \infty$.

Nous en déduisons que $N'_{\max} \rightarrow \infty$. A la différence du cas précédent il n'y a pas de saturation des états excités, et par suite pas de condensation.

114 – $N'_{\perp}(T, \mu)$ représente le nombre d'atomes qui ne sont pas dans l'état fondamental transverse.

115 – D'après le calcul précédent,

$$N_p(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} \sum_{n_x+n_y=p} g_{1/2}(\tilde{z}e^{-p\beta\hbar\omega}).$$

Il y a $(p+1)$ valeurs de (n_x, n_y) telle que $n_x + n_y = p$, c'est la dégénérescence d'un niveau d'énergie $p\hbar\omega$ à deux dimensions. D'où le résultat attendu

$$N_p(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} (p+1) g_{1/2}(\tilde{z}e^{-p\beta\hbar\omega}).$$

116 – Par définition

$$N'_{\perp}(T, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) g_{1/2}(\tilde{z}e^{-k\beta\hbar\omega}) = \frac{L}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^p}{p^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) e^{-kp\beta\hbar\omega}.$$

Posons $x = e^{-p\beta\hbar\omega}$. La série s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) e^{-kp\beta\hbar\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k = -1 + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

D'où le résultat

$$N'_{\perp}(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^p}{p^{1/2}} \left(\frac{1}{(1 - e^{-p\beta\hbar\omega})^2} - 1 \right).$$

117 – Posons $x = e^{-y}$, on montre facilement que

$$\frac{1}{(1 - e^{-y})^2} - 1 < \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}.$$

D'où la borne supérieure

$$N'_1(T, \mu) < \frac{L}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1/2}} \left(\frac{1}{p\beta\hbar\omega} + \frac{1}{(p\beta\hbar\omega)^2} \right) = \frac{L}{\lambda} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right) g_{3/2}(1) + \frac{L}{\lambda} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 g_{5/2}(1).$$

118 – La densité linéique des atomes dans les états autres que l'état fondamental transverse est donc bornée par une fonction de la température. A taille de boîte fixée, et pour un nombre fini d'atomes N , il existe donc une température critique en dessous de laquelle on ne pourra pas "mettre" tous les atomes dans ces états, il se produit donc une condensation d'atomes dans l'état fondamental transverse, et ce pour différents états longitudinaux possibles. La condensation n'est pas à comprendre ici comme la condensation dans l'état fondamental du confinement, nous avons montré à la question précédente qu'il n'y avait pas de condensation dans cet état. La dimensionalité effective joue donc fortement sur le phénomène de condensation.

3.3. Mesures par temps de vol

119 – En l'absence de forces extérieures et en l'absence d'interactions (gaz de Bose parfait), les vitesses des atomes ne sont pas modifiées et par suite la dispersion de vitesse reste constante.

120 – $\Psi_0(x, z) = \psi_0(x)/\sqrt{L}$ avec $\int |\psi_0|^2 dx = 1$ ou encore $\Psi_0(x, z) = \sqrt{N}\psi_0(x)/\sqrt{L}$ avec $\int |\psi_0|^2 dx = N$.

121 –

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \implies i\omega \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{t}} = -\frac{\hbar}{2ma_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{x}^2} \implies -2i \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{x}^2}. \quad (9)$$

122 –

$$\begin{aligned} \ln \Psi &= \ln \mathcal{N} + \frac{i\dot{\beta}\hat{x}^2}{2\beta} - \frac{\hat{x}^2}{2\beta^2} \implies \partial_x \Psi = \left(\frac{i\dot{\beta}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) x \Psi \\ \partial_{xx} \Psi &= \left(\frac{i\dot{\beta}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) \Psi + x^2 \left(-\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4} - \frac{2i\dot{\beta}}{\beta^3} \right) \Psi \\ -2i\partial_t \Psi &= \left(-2i\frac{\dot{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}} + \frac{\ddot{\beta}x^2}{\beta} - \frac{\dot{\beta}^2 x^2}{\beta^2} - \frac{2i\dot{\beta}x^2}{\beta^3} \right) \Psi \end{aligned}$$

D'où

$$-2i\frac{\dot{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}} = \frac{i\dot{\beta}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{\beta}}{\beta} = \frac{1}{\beta^4} \implies \ddot{\beta} = \frac{1}{\beta^3}.$$

123 – $\beta(0) = 1$ et $\dot{\beta}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale).

124 –

$$\ddot{\beta}\dot{\beta} = \frac{\dot{\beta}}{\beta^3} \implies \frac{\dot{\beta}^2}{2} - 0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \implies \beta\dot{\beta} = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

On a utilisé le fait que $\dot{\beta} > 0$ (effet de dilatation). Changement de variable $u = \beta^2$

$$\frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u-1}} = d\hat{t} \implies \sqrt{u-1} = \hat{t}$$

d'où $\beta(t) = (1 + \omega^2 t^2)^{1/2}$.

125 – $\Delta x^2(t) = \beta^2(t) \Delta x_0^2 = (1 + \omega^2 t^2) \Delta x_0^2$.

126 – On a démontré que

$$|\Psi(x, t)| = |\mathcal{N}| \left| \psi_0 \left(\frac{x}{\beta} \right) \right|$$

c'est-à-dire que $|\Psi|$ a la même dépendance spatiale que $|\psi_0|$ moyennant un coefficient de dilatation β (le tout en conservant la norme). On peut donc parler d'effet loupe puisque la forme de la fonction d'onde peut être observée à une échelle plus grande.

Le cas d'un gaz de Boltzmann

127 – La dispersion de vitesse est noté Δv . Elle est définie par

$$(\Delta v)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v^2 P_v(v) dv \right) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} v P_v(v) dv \right)^2$$

128 – Ce résultat s'obtient soit par le calcul direct de la relation ci-dessus soit par application du théorème d'équipartition. Ce théorème stipule que pour tout hamiltonien constitué de termes quadratiques des variables dynamiques (q_i, p_i) , la valeur moyenne thermique correspondante vaut $k_B T/2$. Exemple : $H = mv^2/2$ où la vitesse s'entend selon un seul axe ici. $\langle H \rangle = k_B T/2$, ce qui donne directement le résultat.

129 – $(\Delta x)^2 = k_B T/m\omega^2$. Idem soit par calcul direct soit en invoquant le théorème d'équipartition pour l'énergie potentielle $\langle m\omega^2 x^2/2 \rangle = k_B T/2$.

130 – Cette expression traduit la probabilité de présence en x avec une vitesse v et au temps t . Les atomes qui contribuent à cette probabilité sont les atomes de la distribution initiale de vitesse $v_0 = v$ (car la vitesse n'est pas affectée par le temps de vol, aucune force ne s'exerce sur l'atome pendant le temps de vol) et dont la position x_0 était telle qu'après une propagation pendant un temps t ils se retrouvent à la position x .

131 –

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x, v; t) dv = \frac{1}{t} \int dx_0 P_0 \left(x_0, \frac{x - x_0}{t} \right) \\ &= \frac{N}{2\pi t \Delta x \Delta v} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{-x_0^2/(2\Delta x^2)} e^{-(x-x_0)^2/(2\Delta v^2 t^2)} \\ &= \frac{N}{2\pi t \Delta x \Delta v} \sqrt{2\pi} \frac{\Delta x \Delta v t}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta v^2 t^2}} e^{-x^2/(2(\Delta x^2 + \Delta v^2 t^2))} \\ &= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta v^2 t^2}} e^{-x^2/(2(\Delta x^2 + \Delta v^2 t^2))} \end{aligned} \tag{10}$$

132 – La distribution de densité initiale s'écrit

$$n(x, 0) = P_x(x_0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Delta x_0} e^{-x^2/(2\Delta x_0^2)},$$

elle a pour dispersion Δx_0 . La distribution $n(x, t)$ prend la même forme avec Δx_0 remplacé par $\sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta v^2 t^2}$. On en déduit que cette quantité représente la dispersion à l'instant t .

133 – Dans une expérience de temps de vol, on mesure la taille du nuage et par suite $\Delta x(t)$ à différent temps. Le graphe de Δx^2 en fonction de t^2 donne, d'après nos calculs, une droite de pente Δv^2 . La connaissance de Δv^2 nous permet de remonter à la température grâce au théorème d'équipartition.

134 – $\gamma \sim n\sigma\bar{v}$. On suppose implicitement dans le calcul précédent que les atomes sont indépendants les uns des autres. Cette hypothèse est valable s'il n'y a pas de "pression" dues aux collisions soit $\gamma \ll \omega$, régime pour lequel il y a très peu de collisions par période d'oscillation.

135 – Dans les deux cas, on obtient $(\Delta x)^2 = (\Delta x_0)^2(1 + \omega^2 t^2)$. Un temps de vol à une dimension ne permet pas de distinguer un gaz de Boltzmann de dispersion Δv , d'une fonction d'onde macroscopique (même fonction d'onde pour tous les atomes $|\phi(1, \dots, N)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi(N)\rangle$), de même dispersion.

3.4. Caractère monomode ou multimode

136 – On utilise $[a, a^\dagger] = 1$. $\hat{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$.

137 – $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \implies E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

138 – $p_x|n\rangle \propto i(a^\dagger - a)|n\rangle = i(\sqrt{n+1}|n+1\rangle - \sqrt{n}|n-1\rangle)$, $\langle n|p_x|n\rangle = 0$ car les états nombres sont orthogonaux.

139 –

$$\langle n \rangle = \langle \Psi | \hat{n} | \Psi \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_p^* n c_n \langle p | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n |c_n|^2.$$

140 –

$$\langle H_{\text{cin}} \rangle = \frac{1}{2m} \langle \psi | p_x^2 | \psi \rangle = -\frac{\hbar\omega}{4} \langle (a^\dagger - a)(a^\dagger - a) \rangle.$$

$$\langle H_{\text{pot}} \rangle = \frac{m\omega^2}{2} \langle \psi | x^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar\omega}{4} \langle (a^\dagger + a)(a^\dagger + a) \rangle.$$

D'où

$$\langle H_{\text{pot}} \rangle = \langle H_{\text{cin}} \rangle \implies \langle (a^\dagger)^2 \rangle + \langle a^2 \rangle = 0.$$

Cette égalité n'est plus valable dès qu'il y a des corrélations entre états nombres $|n\rangle$ et $|n+2\rangle$.

141 – La thermalisation gomme les corrélations entre états propres de l'hamiltonien. Les π_n représentent les populations thermiques des états nombres. D'aucuns évoqueront peut-être l'utilité du concept de matrice densité dans ce contexte, matrice densité dont seuls les éléments diagonaux dans la base propre sont peuplés dans le cas d'un gaz à l'équilibre thermodynamique.

142 – Pour un gaz classique non dégénéré, les populations sont données par le facteur de Boltzmann (attention de ne pas oublier la normalisation)

$$\pi_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \text{ avec } Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}.$$

Pour le gaz de Bose

$$\pi_n = \frac{1}{e^{\beta(E_n - \mu)} - 1},$$

la normalisation est ici implicitement prise en compte dans le potentiel chimique.

143 –

$$\langle\langle p_x \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | p_x | n \rangle = 0.$$

$$(\Delta v)^2 = \frac{1}{m^2} (\langle\langle p_x^2 \rangle\rangle - \langle\langle p_x \rangle\rangle^2) = \frac{\langle\langle p_x^2 \rangle\rangle}{m^2} = \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | p_x^2 | n \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | (a^\dagger - a)(a^\dagger - a) | n \rangle.$$

$$(\Delta v)^2 = \frac{\hbar\omega}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | a^\dagger a + a a^\dagger | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | 1 + 2a^\dagger a | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n (1 + 2n).$$

$$(\Delta v)^2 = \frac{\hbar\omega}{2m} + \frac{\hbar\omega}{m} \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \frac{\hbar\omega}{m} \left(\langle\langle n \rangle\rangle + \frac{1}{2} \right).$$

144 – Le lien précédent suggère d'utiliser les expériences dites de temps de vol.

145 – $\langle\langle n \rangle\rangle = 0,09$.

146 –

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \implies \pi_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n.$$

D'où $\pi_0 \geq 1 - \langle\langle n \rangle\rangle$, soit dans notre cas $\pi_0 \geq 0,91$. Plus de 91 % des atomes sont dans l'état fondamental transverse. On peut donc parler dans ce cas d'un laser à atomes quasi monomode transverse.

147 – Celle d'une fibre optique monomode avec ici une inversion des rôles matière - lumière. Dans le cas du laser à atomes, la gaine confinante est fournie par le laser de puissance i.e. par la lumière et c'est une onde de matière qui se propage dans cette canalisation. Dans le cas d'une fibre optique, c'est l'inverse.

148 – Il s'agit de l'état interne des atomes.

149 – Pour la lumière la dimension de l'espace des polarisations est de deux. Dans le cas des atomes cela dépend des atomes. Par exemple pour le césium 133, il y a deux niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$, de dégénérescence respective 7 et 9, soit un espace de polarisation de dimension 16!