ministère Éducation nationale

**EAE PHP 1**

**SESSION 2014**

# AGRÉGATION
# CONCOURS EXTERNE

## Section : PHYSIQUE-CHIMIE
## Option : PHYSIQUE

## COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

***NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

A

# Acoustique sous-marine

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques et applications des ondes acoustiques dans l'océan. Le sujet comporte quatre parties dont la première est indépendante des suivantes.

**Données**

Toute valeur numérique fournie avec un seul chiffre significatif est un ordre de grandeur. Les applications numériques faisant intervenir ces ordres de grandeurs seront fournies avec un chiffre significatif.

| | |
|---|---|
| Permittivité du vide | $\varepsilon_0 = 8{,}8 \times 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$ |
| Perméabilité du vide | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$ |

*Propriétés électriques de l'eau de mer en basse fréquence* :

| | |
|---|---|
| Conductivité | $\gamma = 4\,\mathrm{S{\cdot}m^{-1}}$ |
| Permittivité relative | $\varepsilon_r = 80$ |

*Propriétés mécaniques et thermodynamiques de l'eau de mer :*

| | |
|---|---|
| Masse volumique moyenne | $\rho_0 = 1{,}0 \times 10^{3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ |
| Compressibilité isentropique | $\chi_S = 4{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa^{-1}}$ |
| Diffusivité thermique | $D_{\mathrm{th}} = 1{,}5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$ |
| Viscosité dynamique | $\eta = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}}$ |
| Viscosité de volume | $\zeta = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}}$ |

**Formulaire**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$
$$\mathrm{div}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \vec{A} + f\,\mathrm{div}\,\vec{A}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(fg) = f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$$

Opérateur Laplacien scalaire en coordonnées sphériques pour un champ $U(r,t)$ :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2}$$

**Représentation complexe** : on pourra associer à toute grandeur sinusoïdale $f(t) = f_0\cos(\omega t + \phi)$ la grandeur complexe $\underline{f} = f_0 e^{i\phi}e^{i\omega t} = \underline{f_0}\,e^{i\omega t}$ avec $f(t) = \mathrm{Re}(\underline{f})$.

La valeur moyenne temporelle du produit de deux fonctions sinusoïdales $f$ et $g$ de même période peut être calculée à partir de leurs représentations complexes à l'aide de la relation

$$\langle f \times g\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{f} \times \underline{g}^*\right)$$

où $\underline{g}^*$ est le conjugué de $\underline{g}$.

# I – Propagation des ondes électromagnétiques dans l'océan

Les ondes couramment employées pour cartographier ou mesurer des distances sur Terre sont les ondes électromagnétiques – dites radar – de fréquence comprise entre 1MHz et 100 MHz.

Nous allons étudier la propagation de ces ondes électromagnétiques dans l'océan. L'eau de mer est assimilée à un milieu localement neutre, de conductivité $\gamma$, de permittivité électrique relative $\varepsilon_r$ et de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$. On suppose que ces grandeurs sont constantes sur l'intervalle de fréquence [1 MHz – 100 MHz].

On note $\vec{j}(M,t)$ la densité volumique de courant de charges libres, $\vec{E}(M,t)$ le champ électrique et $\vec{B}(M,t)$ le champ magnétique en un point $M$ de l'océan. Ces champs sont solutions des équations suivantes

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad (1) \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$
$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \quad (3) \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

**1** – Nommer et commenter ces quatre équations.

On se limite à l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques harmoniques planes progressives de pulsation $\omega$ de champs $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ donnés en représentation complexe

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{\mathcal{E}}}(M)e^{i\omega t},$$
$$\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{\mathcal{B}}}(M)e^{i\omega t}.$$

**2** – Compte tenu des données fournies en début de problème, comparer les ordres de grandeurs des deux termes intervenant dans l'équation (2).

**3** – En déduire l'équation aux dérivées partielles dont est solution $\underline{\vec{E}}$.

Donner le nom de cette équation.

**4** – Sans résoudre cette équation, donner l'expression de la distance caractéristique $\delta$ d'atténuation du champ électrique ainsi que son ordre de grandeur numérique pour des ondes électromagnétiques radar. On donnera l'expression de $\delta$ à un facteur numérique de l'ordre de l'unité près.

Indiquer le phénomène physique à l'origine de l'amortissement de l'onde.

Commenter la validité de l'hypothèse $\varepsilon_r$ indépendant de la fréquence.

Les ondes électromagnétiques radars ne peuvent pas être utilisées pour sonder les fonds marins ou communiquer dans l'océan. Les ondes acoustiques vont en revanche jouer un rôle primordial comme outil de sondage de l'océan.



**Tournez la page S.V.P.**

# II – Propagation des ondes sonores dans un fluide homogène

Dans toute cette partie, l'eau de mer est considérée comme un fluide homogène, de masse volumique $\rho$ et de compressibilité isentropique constante $\chi_S$.

A l'équilibre, le champ de pression est supposé uniforme, de valeur $P_0$, la masse volumique est également supposée uniforme, de valeur $\rho_0$, et le champ de vitesse est uniformément nul $\vec{v} = \vec{0}$.

En présence d'une perturbation, les champs de pression $P(\vec{r},t)$, de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$ et de masse volumique $\rho(\vec{r},t)$ sont modifiés :

$$\begin{aligned} P(\vec{r},t) &= P_0 + p(\vec{r},t), \\ \rho(\vec{r},t) &= \rho_0 + \mu(\vec{r},t), \\ \vec{v}(\vec{r},t) &= \vec{0} + \vec{v}(\vec{r},t). \end{aligned}$$

Hypothèses : on suppose que l'écoulement est parfait et on se place dans l'approximation acoustique où les perturbations sont de faible amplitude et où les calculs sont limités à l'ordre 1. On néglige l'effet du champ de pesanteur.

## 1. Équations de propagation

**5** – Rappeler la définition d'un écoulement parfait. Donner les conséquences de cette hypothèse dans le cas des ondes sonores.

**6** – Rappeler l'équation d'Euler et en déduire la relation

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p.$$

**7** – Les champs de masse volumique et de vitesse sont liés par la relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Donner la signification physique de cette relation et la linéariser.

**8** – On rappelle que $\chi_S = \left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_S$. Établir une équation linéaire liant $p, \chi_S$ et $\mu$.

**9** – Établir l'équation de propagation dont $p$ est solution. En déduire l'expression de la célérité $c$ des ondes sonores et vérifier sa dimension. Évaluer numériquement $c$ dans l'eau. La comparer à la célérité des ondes sonores dans un gaz ou dans un solide et commenter.

**10** – Montrer que l'écoulement $\vec{v}(\vec{r},t)$ est irrotationnel. En déduire l'équation de propagation en $\vec{v}$.

## 2. Étude énergétique

**11** – Montrer à partir des équations précédentes que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{\chi_S}{2} p^2\right) + \operatorname{div}(p\vec{v}) = 0.$$

Donner la signification physique de cette relation.

**12** – On pose $e = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_S p^2$ et $\vec{\Pi} = p\vec{v}$. Donner les dimensions, noms et significations physiques de $\vec{\Pi}$ et des deux termes composant $e$.

## 3. Exemple de l'onde plane progressive

Dans cette partie, on se limite à des ondes planes se propageant selon $\pm\vec{e_x}$.

**13** – Donner la forme générale du champ de pression $p(x,t)$ d'une solution progressive, se propageant selon les $x$ croissants et solution de l'équation obtenue à la question **9**. En déduire l'expression du champ de vitesse associé $\vec{v}(x,t)$. Donner sa polarisation *i.e.* la direction du champ de vitesse.

**14** – *Étude énergétique*

Déterminer les expressions de $e$ et de $\vec{\Pi}$ pour l'onde étudiée à la question **13**. En déduire une relation entre $e$ et $\vec{\Pi}$. Interpréter.

Dans le cadre de l'acoustique sous-marine, on définit l'intensité sonore $I$ par $I = \left|\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle\right|$ où $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle$ représente la valeur moyenne temporelle de $\vec{\Pi}$, et l'intensité sonore en décibel par $I_{\text{dB}} = 10\log\frac{I}{I_r}$ où $I_r$ est l'intensité de référence associée à une pression acoustique **harmonique** d'amplitude $p_r = 1{,}0 \times 10^{-6}$ Pa.

## 4. Ordres de grandeurs

Nous allons vérifier à l'aide de quelques ordres de grandeurs la validité des hypothèses effectuées.

Les ondes sonores utilisées par les sonars pour sonder les fonds marins ont des fréquences comprises entre 3 kHz et 300 kHz et des puissances très variables. Dans cette partie, pour les calculs d'ordre de grandeurs demandés, on considèrera une onde progressive plane monochromatique de pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^5$ rad/s et d'intensité $I_{\text{dB}} = 100\,\text{dB}$.

**15** – *Pression acoustique et masse volumique*

Déterminer l'ordre de grandeur de l'amplitude $p_M$ de la surpression acoustique. En déduire l'ordre de grandeur de l'amplitude $\mu_M$ de la perturbation en masse volumique. Conclure.

**16** – *Écoulement de faible vitesse*

Lors de la linéarisation de l'équation d'Euler, indiquer devant quel terme l'accélération convective a été négligée. En déduire la condition sur $v$ pour laquelle cette approximation est valable. Conclure sur la validité de cette approximation.

**17** – *Écoulement isentropique.*

Décrire l'évolution de la température d'une particule de fluide au passage d'une onde acoustique.

Ces variations de températures peuvent être à l'origine de transferts thermiques.

Déterminer l'expression de la distance caractéristique de diffusion $L_{\text{diff}}$ de la chaleur durant une période de l'onde acoustique. En déduire la condition sur la fréquence $f$ de l'onde



**Tournez la page S.V.P.**

sonore pour laquelle la transformation peut être modélisée par une évolution adiabatique. faire l'application numérique et conclure.

*Champ de pression uniforme*

On note $z$ la verticale descendante, l'origine étant placée à la surface de l'océan. Nous avons négligé l'influence du champ de pesanteur $\vec{g} = g\,\vec{e_z}$, supposé uniforme. Dans les questions **18** à **20**, nous tenons compte de l'influence de $\vec{g}$ a priori.

**18** – Déterminer le champ de pression statique $P_{\text{stat}}(z)$ dans l'océan en négligeant toute variation de masse volumique avec la profondeur. On note $P_0$ la pression à la surface de l'océan.

Donner l'ordre de grandeur $h$ de la profondeur des océans. En déduire l'ordre de grandeur numérique de la variation relative de $\rho$ sur la hauteur $h$. Conclure sur l'hypothèse effectuée.

**19** – En présence de l'onde sonore, le champ de pression est $P(\vec{r},t) = P_{\text{stat}}(z)+p(\vec{r},t)$. Démontrer la relation suivante

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p + \mu \vec{g}.$$

**20** – Déterminer la condition sur la fréquence $f$ de l'onde sonore afin de pouvoir négliger le terme supplémentaire dû au champ de pesanteur dans l'équation d'Euler. Conclure.

## 5. Atténuation d'une onde sonore dans l'océan

### *Influence de la viscosité*

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique et on utilise des notations identiques à celles de la sous partie 1.

Dans cette partie, le modèle choisi est celui du fluide newtonien et on remplace l'équation d'Euler par l'équation de Navier Stokes pour un écoulement newtonien et compressible :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{1}{3}\eta + \zeta\right)\overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{v}).$$

où $\eta$ est la viscosité dynamique et $\zeta$ la viscosité de volume.

L'équation de conservation de la masse et l'équation liant $p$ et $\mu$ sont inchangées.

**21** – Linéariser l'équation de Navier-Stokes.

**22** – Montrer que $p$ est solution de

$$\Delta p + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\Delta p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

où $c$ est la célérité en l'absence de viscosité et $\tau_0$ est un temps caractéristique à définir. Donner l'ordre de grandeur numérique de $\tau_0$.

Compte tenu de la valeur numérique de $\tau_0$ et de la gamme de fréquence étudiée ($\omega < 1\times 10^7\,\text{rad·s}^{-1}$), on exprimera les résultats demandés à l'ordre le plus bas non nul en $\tau_0\omega$ dans les questions qui suivent.

**23** – On cherche des solutions sous forme de pseudo ondes planes progressives harmoniques se propageant selon $\vec{e_x}$. Le champ de pression est alors noté en représentation complexe : $\underline{p} = p_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ où $\underline{k}$ est complexe a priori.

Déterminer la relation de dispersion $f(\underline{k}, \omega) = 0$.

**24** – En déduire l'expression approchée de $\underline{k} = k' - ik''$. Donner l'interprétation physique de $k'$ et $k''$.

On donne $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

**25** – Déterminer la vitesse de phase $v_\phi$ de l'onde sonore et comparer à la célérité en l'absence de viscosité. Déterminer la gamme de fréquence pour laquelle la différence relative entre $v_\phi$ et $c$ est inférieure à $0,1\%$. Conclure.

**26** – Exprimer le champ de pression réel $p(x,t)$. En déduire l'expression du taux $\alpha$ d'atténuation de l'intensité acoustique $|\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{dB}}}{\mathrm{d}x}|$.

Évaluer numériquement $\alpha$ en dB/km pour les fréquences $f = 1\,\mathrm{kHz}$ et $f = 300\,\mathrm{kHz}$.

Expérimentalement, on mesure les taux d'atténuation suivants

| f en kHz | 1 | 30 | 300 |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ en dB/km | 0,07 | 5 | 100 |

Les valeurs calculées précédemment sont différentes des valeurs mesurées. Il existe d'autres phénomènes responsables de l'amortissement d'une onde sonore dans l'océan, en particulier à basse fréquence.

# III – Applications aux sonars

Dans cette partie, nous nous intéressons aux sources d'ondes sonores dans l'océan. Après l'étude d'une solution plus réaliste que l'onde plane aux équations de d'Alembert, nous déterminerons les champs de pression rayonnés par des sonars. Ces résultats seront ensuite appliqués à l'étude de sonars mono-faisceau et des sonars multifaisceaux.

## 1. Caractéristiques d'une onde sphérique en champ lointain

On se place en coordonnées sphériques de centre $O$ et on recherche une onde de symétrie sphérique du type $p(r,t)$ solution de l'équation de d'Alembert. On se limite aux solutions progressives se propageant selon $+\vec{e_r}$.

**27** – Déterminer l'équation au dérivées partielles dont est solution $p$. En déduire la forme de $p(r,t)$.

On s'intéresse aux solutions harmoniques de pulsation $\omega$ et on se place en représentation complexe $\underline{p}(r,t) = \frac{\underline{\alpha}_0}{r} e^{i(\omega t - kr)}$.

**28** – Déterminer l'expression approchée du champ de vitesse $\vec{\underline{v}}(r,t)$ à grande distance, c'est-à-dire lorsque $kr \gg 1$. Commenter.

**29** – Déterminer la puissance moyenne $< \mathcal{P} >$ traversant une sphère de centre $O$ et de rayon $r$. Commenter.



**Tournez la page S.V.P.**

## 2. Étude d'un sonar mono-faisceau

### *Onde rayonnée par une antenne rectangulaire*

Les sonars comportent des antennes (émission ou réception) formées de céramiques piézoélectriques, de formes variées. Une géométrie simple et couramment utilisée pour les sonars latéraux ou multifaisceaux est la géométrie rectangulaire.

On considère une antenne rectangulaire $(\mathcal{A})$ de largeur $\ell$ selon $\vec{e_x}$ et de hauteur $L$ selon $\vec{e_y}$, représentée figure 1, alimentée par un signal électrique sinusoïdal de pulsation $\omega$. On note $\lambda$ la longueur d'onde de l'onde sonore associée.

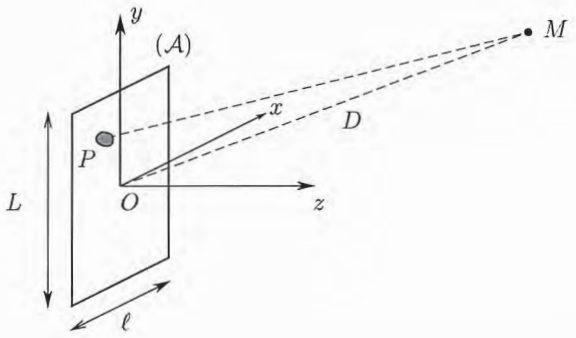


FIGURE 1 – Antenne rectangulaire

L'onde sonore émise par l'antenne correspond à un champ de pression $\underline{p}(M,t)$ en représentation complexe d'expression

$$\underline{p}(M,t) = \underline{A} \iint_{P\in\mathcal{A}} \frac{e^{i(\omega t - kPM)}}{PM}\,\mathrm{d}^2S = \underline{A}e^{i(\omega t - kOM)} \iint_{P\in\mathcal{A}} \frac{e^{ik(OM-PM)}}{PM}\,\mathrm{d}^2S.$$

**30** – Commenter cette expression.

Dans la suite, on souhaite simplifier cette expression dans le cas d'un point $M$ situé à « grande distance » de l'antenne. On note $D = OM$ la distance moyenne séparant l'antenne du point $M$.

**31** – *Facteur d'amplitude.* Donner l'ordre de grandeur de la distance $D$ minimale pour laquelle les variations du terme d'amplitude $1/PM$ sont négligeables.

**32** – *Facteur de phase.* Exprimer le terme de déphasage $\phi = k(OM - PM)$ en fonction des coordonnées $(x, y, 0)$ du point $P$ et de celles $(x_M, y_M, z_M)$ du point $M$. Déterminer une condition sur $D$ pour que l'on puisse négliger les termes non linéaires en $(x, y)$ dans l'expression de $\phi$.

Indiquer le nom donné à cette approximation en optique.

Dans la suite, on repère le point $M$ par la direction $\vec{u}$ de $\overrightarrow{OM}$, peu éloignée de l'axe $Oz$, avec $\vec{u} \simeq \sin\alpha\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y} + \vec{e_z}$.

Le champ de pression en $M$ est alors donné par

$$\underline{p}(M,t) = \frac{\underline{K}}{D} \iint_{P\in\mathcal{A}} e^{-ik\vec{u}.\overrightarrow{OP}}\,\mathrm{d}^2S$$

où $\underline{K}$ est une constante.

**33** – En déduire l'expression de $\underline{p}(M,t)$ en fonction de $\theta, \alpha,\ D, \ell, L, \lambda$ et d'une constante multiplicative.

**34** – On se limite à l'étude dans le plan $Oyz$ ($\alpha = 0$). Représenter le diagramme de rayonnement de l'antenne dans ce plan *i.e.* $|\underline{p}(M,t)| = f(\theta)$ en coordonnées polaires, en supposant $L \gg \lambda$. Montrer que l'ouverture angulaire $2\theta_0$ à 3 dB du faisceau, définie par $|\underline{p}(\theta_0,t)| = |\underline{p}|_{\max}/\sqrt{2}$ est donnée en degrés par

$$2\theta_0 \simeq 50\,\frac{\lambda}{L}.$$

On donne $\mathrm{sinc}(1,39) \simeq 1/\sqrt{2}$ où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

**35** – La variation avec $D$ de l'amplitude de l'onde est identique à celle d'une onde sphérique. Quel intérêt y-a-t-il à réduire la valeur de $\theta_0$ ?

### *Application au sonar mono-faisceau*

Le sonar le plus simple est constitué d'une antenne de forme circulaire, assimilée à un carré de côté $L$, située sous la coque d'un navire. Les usages de ce type de sonar sont multiples : mesure de la profondeur de l'océan (sondage bathymétrique), détection de bancs de poissons, sondage d'une couche de sédiments.

Étudions un sondeur, destiné aux sondages bathymétriques jusqu'à 1,5 km de profondeur, de fréquence d'émission $f_0 = 33\,\mathrm{kHz}$ avec une bande passante de $\Delta f_0 = 8\,\mathrm{kHz}$ et d'ouverture angulaire $2\theta_0 = 18\,°$.

**36** – Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur $L$ d'un côté de l'antenne.

La mesure de la hauteur d'eau $h$ sous le sondeur est obtenue par envoi d'un signal « ping » formé de $N$ périodes d'une sinusoïde de fréquence $f_0$. Ce signal est répété périodiquement. Le signal émis est de durée $\tau = N/f_0$ comme indiqué figure 2. La mesure de l'écart temporel $\Delta t$ entre le signal émis et le signal réfléchi ou diffusé par le sol reçu par le récepteur permet de mesurer $h$. Cette durée $\Delta t$ est mesurée entre le départ du ping ($t_0$) et le temps d'arrivée le plus court du signal réfléchi.

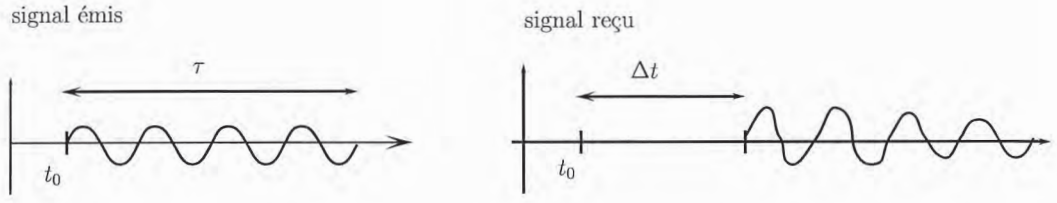


FIGURE 2 – Allure des signaux sonores émis et reçus par le sonar

**37** – Compte tenu de la bande passante $\Delta f_0$ de l'antenne, déterminer la valeur minimale que l'on peut choisir pour $\tau$.

**38** – La mesure de l'écart temporel $\Delta t$ entre les signaux émis et reçus est effectuée avec une précision de l'ordre de $\tau$ compte tenu de la faible intensité et de la déformation de l'écho analysé. En déduire l'expression et la valeur numérique de la résolution verticale maximale que l'on peut obtenir.



**Tournez la page S.V.P.**

**39** – Bien que la résolution verticale diminue quand $\tau$ augmente, en pratique, la mesure d'une profondeur importante nécessite une augmentation de $\tau$. Proposer une explication.

## 3. Sonar multifaisceaux

Si l'antenne précédente n'est pas motorisée, la direction visée est fixée. Afin d'améliorer le système, on utilise un sonar multifaisceaux composé d'un réseau de $N$ antennes identiques rectangulaires de longueur $\Delta y$ et de largeur $d$, séparées d'une distance $d$ fixée (les antennes sont contiguës selon $Ox$) et représentée figure 3. La largeur totale du réseau est $Nd$ selon la direction $x$.

L'antenne est positionnée sous le navire, $\vec{e_z}$ est vertical, $\vec{e_y}$ est horizontal dans la direction longitudinale au navire (arrière/avant).

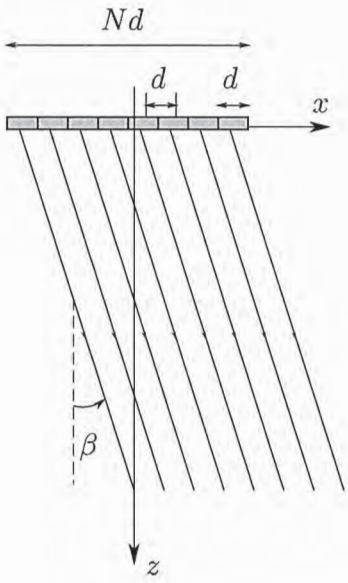


FIGURE 3 – Antenne multifaisceaux

**40** – Chaque antenne élémentaire émet l'onde sonore harmonique étudiée question **33**.

Montrer que l'amplitude complexe du champ de pression résultant en un point $M$ situé dans le plan $Oxz$ dans la direction $\beta$ avec l'axe $Oz$ a l'expression suivante

$$\underline{p} = \frac{\underline{K}}{D} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi d \sin\beta}{\lambda}\right) \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)}$$

où $\psi$ est à exprimer en fonction de $\lambda, d, \beta$.

On simplifiera cette expression compte tenu de l'expression de $\psi$, traduisant l'égalité entre la largeur des antennes et la distance les séparant.

**41** – Déterminer la ou les directions $\beta_m$ pour lesquelles l'amplitude est maximale. Interpréter le résultat obtenu.

On choisit en pratique $d = \lambda/2$. Dans la suite, on utilisera cette valeur de $d$.

**42** – Représenter l'allure du diagramme de rayonnement et déterminer l'ouverture angulaire $2\beta_0$ à 3 dB du lobe principal pour $N = 10$ et $N = 100$. Commenter et comparer aux résultats obtenus pour le mono-faisceau.

**43** – Application numérique : déterminer la taille totale d'une antenne et le nombre de cellules $N$ pour un émetteur multifaisceaux à 12 kHz d'ouverture angulaire $2\beta_0 = 0{,}5\,^\circ$.

**44** – Le principal intérêt des antennes multifaisceaux est la possibilité de modifier la direction du lobe principal. Pour cela, on retarde le début de l'émission de l'antenne $n$ d'un temps $\tau_n = n\tau$ où $\tau$ est une durée constante.

Déterminer le déphasage entre l'onde $\underline{p_n}(M,t)$ émise par la $n$-ième antenne et celle émise par l'antenne $n = 1$. En déduire l'expression de $\tau$ pour que le lobe maximal soit situé dans la direction $\beta$.

En pratique, ce système est plus couramment utilisé en réception pour sélectionner le signal provenant d'une direction choisie.

# IV – Mesure de la célérité des ondes acoustiques dans l'eau

Tous ces systèmes de mesure de profondeur sont basés sur la connaissance de la célérité des ondes sonores dans l'océan.

Dans cette partie, nous étudions un protocole de mesure de la célérité du son $c$ dans l'eau, utilisant du matériel disponible dans un laboratoire de lycée bien équipé et représenté figure 4. L'objectif est de mesurer $c$ avec une précision suffisante pour quantifier ses variations avec la température ou la salinité.

Les émetteurs et récepteurs utilisés sont des transducteurs piezoélectriques cylindriques de rayon $a = 2{,}0\,\text{cm}$ émettant des ondes ultrasonores de fréquence proche de 38 kHz. La source est utilisée soit en mode entretenu où elle émet une onde sinusoïdale soit en mode impulsionnel où elle émet un signal de durée faible de l'ordre de 1 ms.

Les deux transducteurs sont alignés l'un en face de l'autre et placés dans l'eau. Le récepteur peut être translaté selon la direction $Ox$ et sa position $x$ est repérée grâce à un vernier numérique au $1/100^e$ mm. L'ensemble est placé dans un bac parallélépipédique de longueur $L_e = 50\,\text{cm}$, de largeur $l_e = 15\,\text{cm}$ rempli d'eau sur une hauteur $H_e = 8\,\text{cm}$.

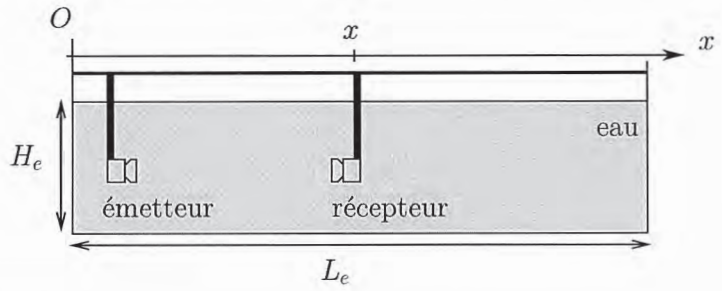


FIGURE 4 – Dispositif expérimental permettant la mesure de la célérité du son dans l'eau

## 1. Étude de la source ultrasonore

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'onde émise par l'émetteur ultra-sonore sur son axe de révolution lorsque celui-ci est alimenté par un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 38{,}5\,\text{kHz}$.

Comme dans la partie précédente, chaque point $P$ de la surface circulaire de rayon $a$ de l'émetteur émet une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à l'aire de l'élément de surface. On suppose que tous les points de la surface vibrent en phase avec la même amplitude. On repère un point $P$ du disque par ses coordonnées polaires, voir figure 5.



**Tournez la page S.V.P.**

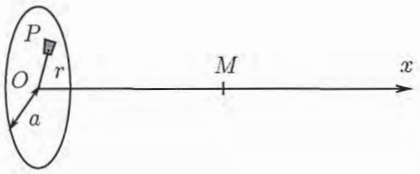


FIGURE 5 – Géométrie de la source ultrasonore

**45** – Montrer que le champ de pression résultant $\underline{p}(M,t)$ en un point $M$ de l'axe à droite de l'émetteur a pour expression

$$\underline{p}(M,t) = \underline{p_M}\left\{1 - \exp\left[-ik\left(\sqrt{x^2+a^2} - x\right)\right]\right\} e^{i(\omega t - kx)}$$

où $\underline{p_M}$ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

**46** – Déterminer la position des maxima $x_{m,n}$ et des zéros $x_{0,n}$ de l'amplitude $p(x) = |\underline{p}(x,t)|$. Interpréter l'existence de ces extréma.

**47** – Déterminer le retard de phase $\varphi(x)$ de l'onde au point $M$ par rapport à la source. Exprimer l'écart $\Phi(x)$ entre ce retard de phase et celui d'une onde progressive plane se propageant à la célérité $c$.

**48** – Déterminer l'expression approchée de $\underline{p}(x,t)$ lorsque $M$ est à grande distance de l'émetteur *i.e.* pour $x \gg D$ où l'on donnera $D$. Commenter.

**49** – On donne ci-dessous les graphes de $p(x)$ dans deux fluides (air et eau).

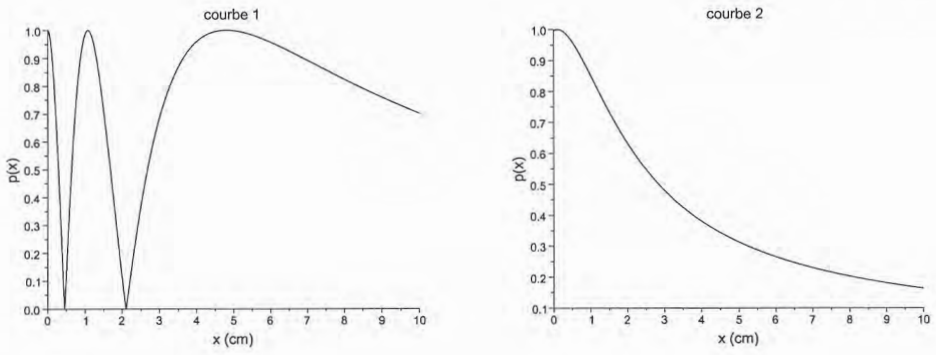


FIGURE 6 – Amplitude relative $p(x)/p_{\max}$ du champ de pression sur l'axe pour $a = 2\,\text{cm}$

Identifier la courbe associée à une propagation dans l'air et celle associée à une propagation dans l'eau. Justifier.

## 2. Comparaison de deux protocoles de mesure

La mesure de la célérité $c$ des ondes sonores peut être effectuée en utilisant deux protocoles différents :

- l'émetteur émet une onde sinusoïdale de fréquence $f_0 = 37{,}71\,\text{kHz}$ mesurée avec une très bonne précision. On visualise le signal sinusoïdal $s_r(t)$ (proportionnel au signal de pression) en sortie du récepteur à l'oscilloscope et on repère les positions $x_i$ correspondant à des variations de $\pi$ de la phase du signal $s_r(t)$.

– l'émetteur est soumis à des impulsions répétées périodiquement tous les $\tau$ et émet ainsi des trains d'ondes acoustiques tous les $\tau$. On mesure les temps d'arrivée $t_n$ de ces trains d'ondes au récepteur pour différentes positions $x_n$ du récepteur. L'exploitation de ces mesures permet de déterminer $c = 1488\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \pm 7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

**50** – Indiquer en justifiant si les deux protocoles permettent d'accéder en toute rigueur à la même grandeur physique.

**51** – Donner la méthode la plus précise pour repérer un déphasage de 0 ou de $\pi$ à l'oscilloscope. Un traitement des mesures des écarts $x_{i+1} - x_i$ fournit la valeur moyenne de cet écart

$$\Delta x = (21 \pm 1)\,\mathrm{mm}.$$

Déterminer $c$ et l'incertitude associée.

Afin de comprendre l'origine de l'écart entre les deux valeurs de $c$ obtenues, on mesure la phase $\varphi_r$ du signal électrique $s_r(t)$ aux bornes du récepteur en fonction de sa position (figure 7), ainsi que son amplitude (figure 8).

La position $x = 0$ correspond à l'émetteur à très faible distance (un à deux millimètres)

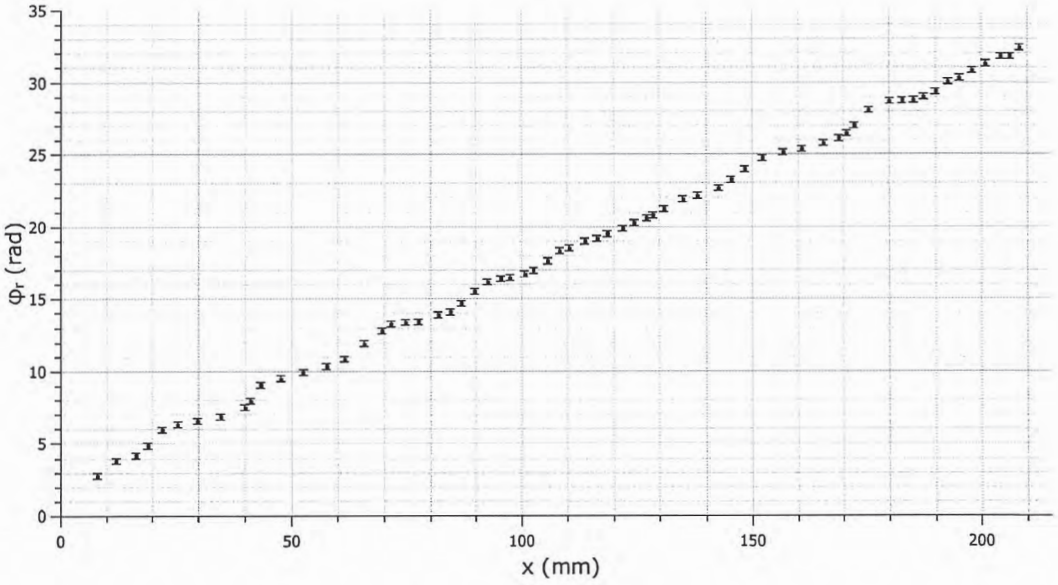


FIGURE 7 – Évolution de la phase $\varphi_r$ de $s_r(t)$ (en radians) en fonction de la position $x$ (en millimètres) du récepteur



**Tournez la page S.V.P.**

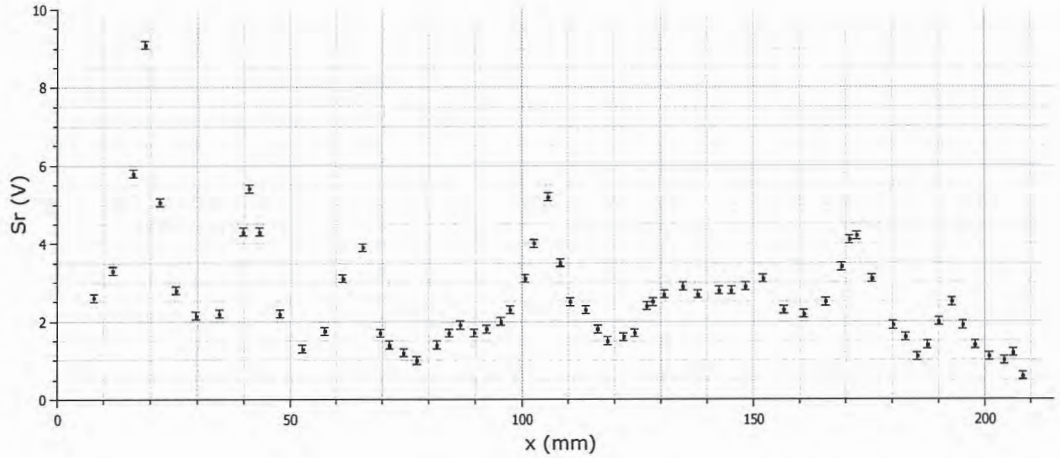


FIGURE 8 – Évolution de l'amplitude $S_r$ de $s_r(t)$ (en volts) en fonction de la position $x$ (en millimètres) du récepteur

**52** – Compte tenu de l'étude du champ de pression sur l'axe menée précédemment, indiquer la partie de la courbe $\varphi_r(x)$ exploitable.

**53** – On modélise la partie exploitable de cette courbe par une droite et on obtient $\varphi(x) = 2,4 + 144x$ où $x$ est en mètres et $\varphi$ en radians. En déduire la valeur de $c$ et comparer à la valeur obtenue par la méthode impulsionnelle.

Les fortes variations d'amplitude $S_r$ peuvent être expliquées par des réflexions multiples de l'onde sonore sur le récepteur et l'émetteur. Afin de déterminer le champ de pression résultant $\underline{p}(x,t)$, on suppose que les coefficients de réflexion en amplitude du champ de pression sont identiques pour les deux transducteurs et on note $\underline{r}$ cette valeur commune. On néglige également toute variation de l'amplitude de l'onde monochromatique au cours de la propagation. La distance séparant le récepteur de l'émetteur est notée $x$.

**54** – Compte tenu de l'allure de la courbe $S_r(x)$, justifier l'hypothèse $|\underline{r}|^4 \ll 1$, effectuée dans la suite.

**55** – Montrer que l'expression du champ de pression $\underline{p}_r(x,t)$ au niveau du récepteur, résultant d'une infinité de réflexions de l'onde sonore entre l'émetteur et le récepteur est

$$\underline{p}_r(x,t) = \underline{p}_0 e^{i(\omega t - kx)} \frac{1}{1 - \underline{r}^2 e^{-i\psi_0}}$$

où $\psi_0$ est un déphasage à exprimer.

En déduire l'amplitude $|\underline{p}_r(x,t)|$ du champ de pression. Simplifier cette expression compte tenu de l'hypothèse faite sur $|\underline{r}|$ et déterminer les valeurs des extrema de $|\underline{p}_r|$.

**56** – Comparer ces résultats aux mesures expérimentales de $S_r$ données figure 8 et en déduire la valeur de $|\underline{r}|$. Discuter l'hypothèse faite sur $|\underline{r}|^4$.

**57** – Indiquer si les phénomènes de réflexion ont un effet sur l'estimation de la célérité obtenue en mode impulsion.

Conclure sur le protocole de mesure à utiliser pour déterminer la célérité du son dans l'eau.

**58** – *Évolution de $c$ avec la température*

La célérité de l'eau dépend de la température et de la salinité. Un modèle usuel est $c = 1449,2 + 4,6\,T - 0,0551\,T^2$ où $T$ est la température en °C et $c$ est donné en $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

On souhaite utiliser le système précédent pour mesurer $c$ à différentes températures variant entre 5 °C et 30 °C.

Évaluer la variation maximale de célérité sur cet intervalle. Indiquer si le système utilisé peut convenir pour cette mesure.

# V – Propagation en milieu non homogène

Des mesures de célérité du son dans l'eau ont confirmé sa dépendance avec la température $T$ et la salinité. $c$ dépend également de la pression $P$.

L'océan n'est pas homogène et le profil de célérité avec la profondeur varie selon le lieu. On peut cependant utiliser un profil standard (déterminé par des mesures sur site) dont l'allure est fournie figure 9.

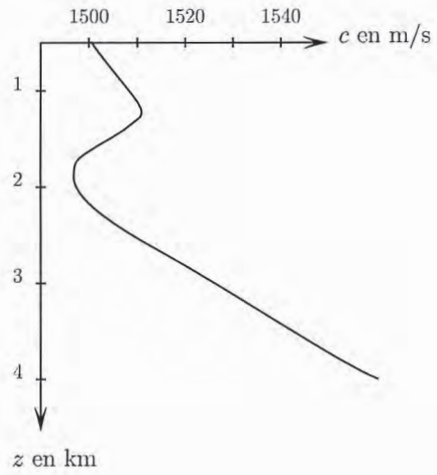


FIGURE 9 – Structure d'un profil bathycélérimétrique dans l'océan Atlantique Nord-Est.

En première approche, nous supposerons que le profil de célérité ne varie pas au cours du temps et ne dépend que de la profondeur $z$ comptée à partir de la surface et nous la noterons $c(z)$.

**59** – Pour des profondeurs supérieures à 2 km, la célérité augmente de façon quasi linéaire (pente de $1{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{s^{-1}}$), et ce dans la plupart des bassins océaniques. Quel est le paramètre physique responsable de cette évolution ? Justifier qualitativement.

### *Modèle des rayons sonores – équation Eikonale*

La célérité $c(x, y, z)$ dépend du point $M$ considéré. On cherche à déterminer une équation approchée donnant la direction de propagation d'une onde acoustique de petite longueur d'onde devant les distances caractéristiques de variation de $c$.

Le champ de pression est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p = \frac{1}{c^2(x, y, z)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$



**Tournez la page S.V.P.**

On cherche une solution de cette équation sous la forme

$$\underline{p}(x,y,z,t) = A(x,y,z)e^{i\omega[t-\Gamma(x,y,z)/c_0]}$$

où $c_0$ est une vitesse de référence et $A$ est une fonction réelle.

**60** – Donner la dimension de $\Gamma$. Indiquer ce que représentent les surfaces $\Gamma(x,y,z) = \text{cte}$.

**61** – Montrer que $A$ et $\Gamma$ sont solutions de

$$\begin{cases} -\dfrac{\Delta A}{A} + \left(\dfrac{\omega}{c_0}\right)^2 \overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma &= \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 \\ 2\overrightarrow{\text{grad}}\,A \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma + A\Delta\Gamma &= 0 \end{cases}$$

**62** – On suppose que $|\frac{\Delta A}{A}| \ll (\omega/c)^2$. Interpréter cette condition.
On pose $n = c_0/c$. Donner la signification physique de cette grandeur et montrer que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma = n\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est la direction de propagation de l'onde.

### *Équation des rayons sonores pour* $c(z)$

On néglige les variations de la célérité avec les coordonnées horizontales et on cherche l'équation des rayons dans un plan vertical en tenant compte de la dépendance de $c$ avec la profondeur $z$.

Dans la suite, la célérité de référence $c_0$ est la célérité en $z = 0$ *i.e.* $c(0) = c_0$. Le plan $z = 0$ est un plan de référence qui n'est pas nécessairement confondu avec la surface de l'océan.

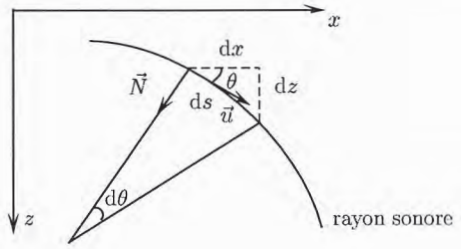


FIGURE 10 – Rayon sonore

On note $\theta$ l'angle entre $\vec{u}$ et l'axe $Ox$. La direction de propagation $\vec{u}$ s'écrit $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_z}$. $s$ est l'abscisse curviligne sur le rayon et $\mathrm{d}s$ un petit élément de longueur. On pose $\theta(z=0) = \theta_0$.

**63** – Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,n.$$

**64** – En déduire

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(n\cos\theta)}{\mathrm{d}s} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(n\sin\theta)}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}. \end{cases}$$

Commenter la première équation.

**65** – On introduit la gradient de la célérité : $\gamma = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}$. On note $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal à la courbe, défini par $\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}$ et $R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ le rayon de courbure algébrique.

Montrer que

$$R = -\frac{1}{\gamma}\frac{c_0}{\cos\theta_0}.$$

Tracer l'allure d'un rayon sonore partant de $z = 0$ avec un angle de $\pi/4$ dans les deux cas $\gamma > 0$ et $\gamma < 0$ et indiquer la direction de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$.

### *Océan arctique*

Le modèle le plus simple pour le profil de célérité dans cet océan est un modèle affine

$$c(z) = c_0 + \gamma_0 z$$

où $c_0 = 1450\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et $\gamma_0 = 1{,}63 \times 10^{-2}\,\mathrm{s^{-1}}$ sur une profondeur maximale $h_a = 3{,}50\,\mathrm{km}$.

**66** – Déterminer la forme géométrique d'un rayon sonore et tracer un rayon de faible incidence $\theta_0 \ll 1$. Commenter.

Déterminer la profondeur $z_0$ atteinte par un rayon sonore d'incidence $\theta_0$ quelconque.

Évaluer numériquement l'incidence $\theta_m$ pour laquelle $z_0 = h_a$. Déterminer la distance horizontale parcourue alors par le rayon lorsqu'il atteint le fond.

**67** – Tracer plusieurs rayons sonores partant du point $A$ situé à la surface de l'océan, d'incidence inférieure et supérieure à $\theta_m$. Expliquer la notion de zone d'ombre.

**68** – On considère un sondeur mono-faisceau mesurant la profondeur $h_a$ de l'océan. Déterminer l'expression de la durée $\Delta t$ d'aller retour d'un rayon sonore d'incidence $\theta_0 = \pi/2$. Déterminer l'erreur commise sur la profondeur mesurée si elle est déterminée à partir de la mesure de $\Delta t$ en supposant que la célérité est uniforme et vaut $c_0$. Commenter.

### *Chenal acoustique*

Dans l'atlantique nord, le profil de célérité à l'allure donnée figure 9.

**69** – Représenter l'allure de rayons sonores issus d'un sous-marin situé à une profondeur proche de 1,5 km. Expliquer la notion de chenal acoustique, appelé SOFAR (sound fixing and ranging channel).

Ce canal fut utilisé dans les années 1950 par la marine américaine pour détecter des sous-marins à grande distance situés dans un certain intervalle de profondeur.