

Microscopies

Introduction

La microscopie désigne l'ensemble des techniques d'observation d'objets, ou de leurs détails, trop petits pour être visualisés à l'œil nu. Les premiers instruments nommés microscopes apparaissent au XVI^{ème} siècle et sont de nature optique.

Dans la partie 1 de la composition, le microscope optique est étudié dans le cadre de l'optique géométrique. À la fin du XIX^{ème}, les travaux de Rayleigh et Abbe, repris en partie 2, permettent de déterminer la limite de résolution classique des microscopes optiques, estimée à quelques dixièmes de micromètres.

La découverte des propriétés ondulatoires de la matière durant la première moitié du XX^{ème} siècle, reprise en partie 4, permet de concevoir des microscopes utilisant des faisceaux de particules comme les électrons.

Enfin, la seconde moitié du XX^{ème} siècle a vu l'émergence de microscopies permettant de dépasser la « limite » de résolution d'Abbe et Rayleigh grâce à la mise au point de sondes locales capables d'explorer des échantillons sur de très petites distances. La microscopie à effet tunnel, étudiée en partie 5, en constitue un des exemples les plus connus.

Néanmoins, ces nouvelles microscopies sont loin d'avoir rendu obsolète la microscopie optique ; l'étude de la microscopie de fluorescence en partie 3 montre comment l'amélioration des techniques de détection et d'analyse d'images permet d'accéder à des précisions de mesure très inférieures au dixième de micromètre.

Les cinq parties de la composition sont très largement indépendantes. Dans chaque partie, il est demandé au candidat de répondre, autant que possible, dans l'ordre des questions. Il sera tenu compte de la clarté, de la précision et de la concision de la rédaction ainsi que du respect des chiffres significatifs dans les applications numériques. Deux documents réponses sont à rendre avec la copie.

Plan de la composition :

1. Étude géométrique du microscope optique

- 1.1. Grossissement et puissance d'un microscope
- 1.2. Champ visuel d'un microscope
- 1.3. Étude d'un objectif au-delà de l'approximation paraxiale

2. Pouvoir séparateur du microscope optique

- 2.1. Diffraction à l'infini d'une onde plane lumineuse
- 2.2. Diffraction, formation des images et pouvoir séparateur en éclairage incohérent
- 2.3. Diffraction, formation des images et pouvoir séparateur en éclairage cohérent

3. Microscopie optique de fluorescence

- 3.1. Microscopie optique de fluorescence
- 3.2. Imagerie et localisation microscopique d'objets ponctuels
- 3.3. Applications à la mesure d'un coefficient de diffusion

4. Microscopie électronique

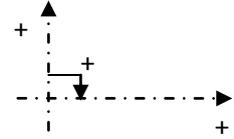
- 4.1. Caractère ondulatoire des électrons
- 4.2. Pouvoir de résolution d'un microscope électronique

5. Microscopie à effet tunnel

- 5.1. Effet tunnel
- 5.2. Application aux électrons libres d'un métal à 0 K
- 5.3. Résolutions du microscope à effet tunnel

Notations et conventions

- Tous les repères introduits dans l'énoncé sont orthonormés directs.
- Le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\pi/2$ est noté i .
- La valeur conjuguée d'un nombre complexe X est notée X^* .
- La dioptrie (de symbole δ) est l'unité de vergence ($1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$).
- Conventions de comptage algébrique des longueurs et des angles.



Transformation de Fourier spatiale

- La transformée de Fourier F de la fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} , avec n un entier correspondant à la dimension de l'espace, est définie par

$$F(\vec{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n r, \text{ où } \vec{k} \in \mathbb{R}^n.$$

- On montre que la transformée de Fourier inverse de la fonction F est la fonction f définie par

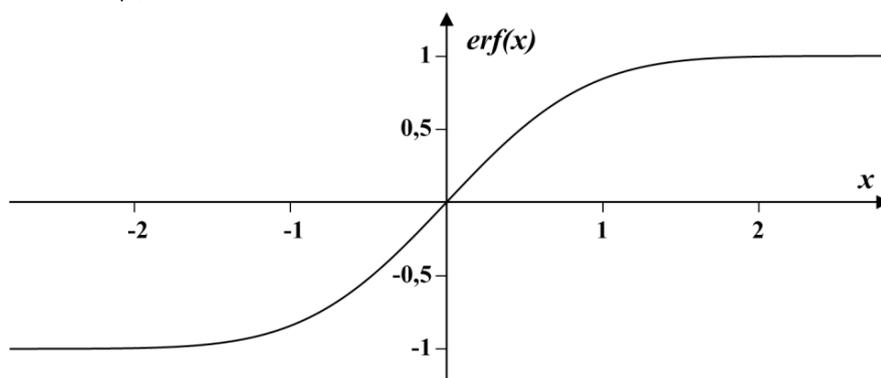
$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\vec{k}, t) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n k.$$

- En particulier, avec a une constante réelle positive et $n = 1$, la transformée de Fourier inverse d'une fonction gaussienne vaut

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2} e^{+ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Fonction erreur erf

- $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} erf(x) = 1$

Intégrale de Gauss

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Données numériques

Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite :	$\hbar = h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Masse de l'électron :	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire :	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Vitesse de la lumière :	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C :	$\eta = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Masse volumique du cuivre :	$\rho = 8,96 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Masse molaire du cuivre :	$M = 63,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

1. Étude du microscope optique dans le cadre de l'optique géométrique

Un microscope optique élémentaire à champ large (figure 1) se compose essentiellement de quatre parties :

- le tube optique, aux extrémités duquel se trouvent deux systèmes optiques centrés convergents de même axe optique : l'objectif du côté de l'objet et l'oculaire du côté de l'œil ou du capteur ;
- la platine sur laquelle est placé l'objet (ou préparation) à étudier ;
- le dispositif de translation du tube, parallèlement à son axe, par rapport à la platine (à mouvements micrométrique « lent » et macrométrique « rapide »), nécessaire à la mise au point ;
- le système d'éclairage de l'objet constitué d'une source, d'un condenseur et d'un diaphragme.

Les liaisons entre ces éléments sont assurées par le statif qui permet de maintenir leur alignement.

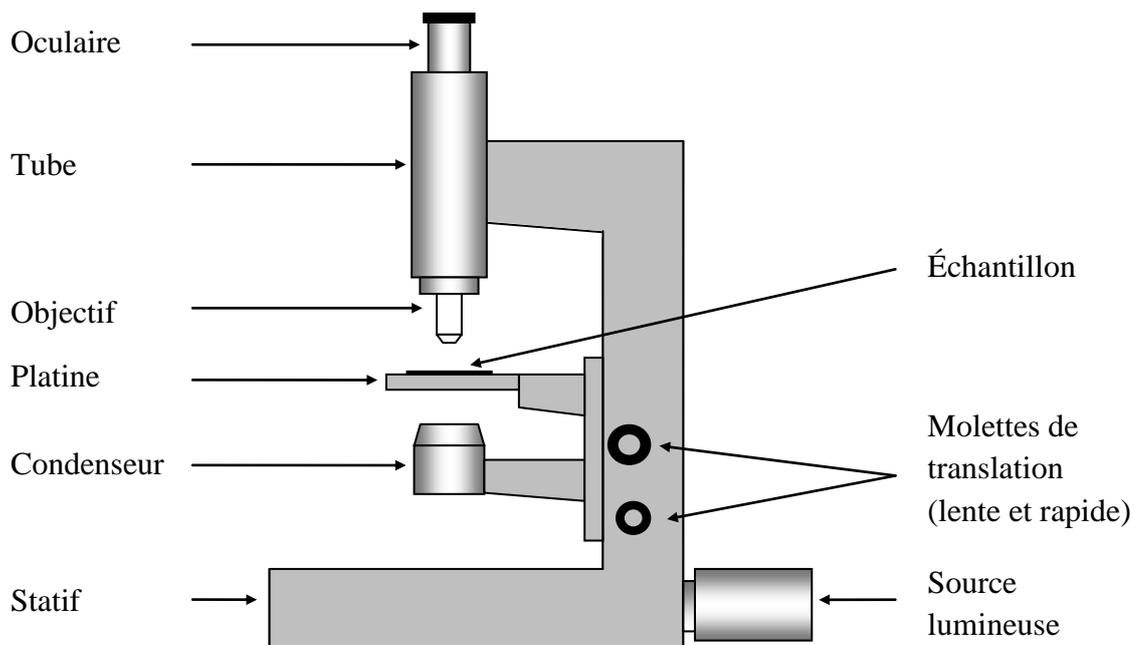


Figure 1 – Schéma d'un microscope optique élémentaire

1.1. Grossissement et puissance d'un microscope

On assimile l'objectif et l'oculaire du microscope à deux lentilles minces convergentes notées respectivement L_1 et L_2 , de même axe optique et de centres optiques respectifs O_1 et O_2 . L'objectif, placé proche d'un objet (AB), positionné perpendiculairement à l'axe optique et tel que le point A soit situé sur cet axe, en donne une image réelle intermédiaire (A_1B_1) très agrandie. L'oculaire joue le rôle de loupe et donne de (A_1B_1) une image finale virtuelle ($A'B'$) agrandie.

Les objectifs usuels ont des distances focales f_1' très petites, de l'ordre de quelques millimètres, et les oculaires des distances focales f_2' de l'ordre de quelques centimètres. On appelle longueur optique du microscope la distance $\Delta = \overline{F_1'F_2}$ entre le foyer image de L_1 et le foyer objet de L_2 .

- 1) On se place dans les conditions de l'approximation de Gauss d'utilisation des lentilles. Rappeler en quoi consistent ces conditions. Indiquer les précautions expérimentales à prendre afin de se placer dans ces conditions. Donner l'intérêt pratique à respecter ces conditions.
- 2) Dans l'approximation de Gauss, si l'on considère une lentille mince de centre optique O, de distance focale image f' , conjuguant un point objet P au point image P' sur l'axe optique, deux formules de conjugaison sont fréquemment utilisées : celle avec origine au centre optique O de la lentille

$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{f'}$$

et celle avec origines aux foyers F et F' de la lentille

$$\overline{F'P'} \cdot \overline{FP} = f \cdot f' = -f'^2.$$

Préciser le nom attribué usuellement à chacune de ces relations.

Constructions géométriques d'images et de rayons

- 3) L'œil emmétrope (à vision normale) voit nettement des objets situés entre la distance minimale de vision distincte $d_m = 25$ cm (le punctum proximum) et l'infini. Rappeler ce que signifie « régler un instrument d'optique à l'infini » et l'intérêt que présente ce réglage.
- 4) Dans toute la suite de la partie 1, le microscope est réglé pour donner une image (A'B') à l'infini d'un objet (AB) perpendiculaire à l'axe optique. Réaliser soigneusement sur le document réponse n°1 la construction géométrique de (A₁B₁), en traçant notamment la marche de deux rayons issus de B : l'un émis parallèlement à l'axe optique et l'autre passant par O₁. Faire apparaître l'angle α' sous lequel on voit l'objet à travers le microscope (α' est le diamètre apparent de l'objet à travers le microscope). Les diaphragmes circulaires D_O et D_C sont placés respectivement dans le plan focal image de L₁ et dans le plan focal objet de L₂, leur rôle sera étudié en partie 1.2.
- 5) Compléter la construction en traçant les rayons issus de A passant par les bords du diaphragme d'ouverture D_O (rayons marginaux).

Le grossissement d'un microscope

Un microscope est constitué d'un objectif portant l'indication x20 et d'un oculaire portant l'indication x10. La longueur optique Δ est égale à +160 mm. On observe un objet (AB), placé perpendiculairement à l'axe optique.

- 6) L'indication x10 de l'oculaire est son grossissement commercial $G_{c,oc}$ défini par le rapport de l'angle sous lequel on voit un objet à l'infini à travers l'oculaire et celui sous lequel on voit ce même objet à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte d_m . Déterminer la distance focale image f_2' de l'oculaire et donner sa valeur numérique.
- 7) L'indication x20 de l'objectif est la valeur absolue de son grandissement transverse γ_{ob} pour une image (A_1B_1) formée à la distance Δ de F_1' . Déterminer la distance focale image f_1' de l'objectif et donner sa valeur numérique.
- 8) Le grossissement commercial G_c du microscope est la valeur absolue du rapport de l'angle sous lequel on voit l'objet à travers le microscope et celui sous lequel on le voit à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte d_m . Exprimer G_c en fonction de $G_{c,oc}$ et de γ_{ob} puis déterminer numériquement G_c .
- 9) Justifier l'affirmation selon laquelle le grossissement du microscope mesure le rapport entre la dimension de l'image rétinienne obtenue par observation de l'objet à travers le microscope et celle obtenue à l'œil nu.

La puissance d'un microscope

- 10) La puissance intrinsèque P_m d'un microscope est la valeur absolue du rapport entre l'angle sous lequel on voit l'objet à travers le microscope et la taille de l'objet ; la puissance P_m s'exprime en dioptrie. Donner la relation entre la puissance du microscope, le grandissement de l'objectif et la distance focale de l'oculaire. Evaluer numériquement la puissance P_m .

1.2. Champ visuel d'un microscope

La latitude de mise au point (ou profondeur de champ en microscopie visuelle)

- 11) Donner l'expression de $\overline{F_1A}$ lorsque l'objet (AB) est placé de sorte que son image finale à travers le microscope soit à l'infini. Déterminer la valeur numérique de $\overline{F_1A}$. Commenter cette valeur.
- 12) Un observateur place son œil, supposé emmétrope, au foyer image de l'oculaire. Déterminer la latitude de mise au point du microscope, définie comme la distance $\overline{A_\infty A_m}$ entre les deux positions de l'objet compatibles avec une vision nette de l'image finale par l'œil, en fonction de f_1' , f_2' , Δ et d_m . Commenter sa valeur numérique. Pour une longueur optique fixée et un oculaire donné, indiquer l'évolution de cette latitude avec la puissance du microscope (modifiable en changeant d'objectif).

Les diaphragmes d'un microscope

On souhaite étudier le rôle du diaphragme d'ouverture D_O et du diaphragme de champ D_C du microscope ; leurs rayons sont notés respectivement R_{DO} et R_{DC} , et $R_{DC} = 8,0$ mm. Le diaphragme d'ouverture se situe dans plan focal image de l'objectif tandis que le diaphragme de champ se situe au niveau du plan focal objet de l'oculaire.

- 13) Montrer, éventuellement à l'aide d'une construction géométrique, que le diaphragme d'ouverture contrôle le flux d'énergie lumineuse entrant dans le microscope.
- 14) Le cercle oculaire, de centre C, est l'image du diaphragme d'ouverture à travers l'oculaire (il s'agit de la pupille de sortie du microscope). Déterminer la position du point C par rapport à F_2' en fonction de f_2' et Δ . Donner la valeur numérique de $\overline{F_2'C}$. Justifier que l'observateur cherche toujours à placer son œil au niveau de ce cercle.
- 15) Montrer, éventuellement à l'aide d'une construction géométrique, que le diaphragme de champ limite la dimension transverse du champ objet observable. Donner la valeur numérique de cette dimension pour le microscope de la partie 1.1.
- 16) Un oculaire possède, en plus de la lentille L_2 et du diaphragme de champ D_C , une seconde lentille L_3 . Par exemple, un oculaire de Huygens (figure 2) est constitué d'un doublet de lentilles minces convergentes non accolées, respectivement appelées verre de champ du côté de l'objectif (lentille L_3) et verre d'œil du côté de l'œil (lentille L_2). L'image intermédiaire se forme toujours dans le plan de D_C , plan focal objet de L_2 . Montrer qualitativement que l'ajout d'un verre de champ L_3 à la lentille L_2 permet notamment d'augmenter la largeur transverse du champ de vision.

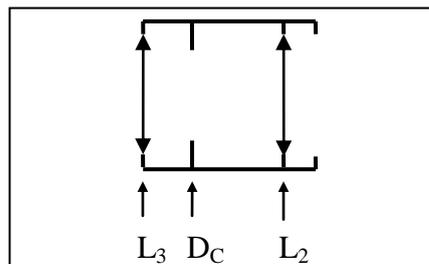


Figure 2 – Oculaire d'Huygens

1.3. Étude d'un objectif au-delà de l'approximation paraxiale

L'ouverture numérique des objectifs de microscope

L'objectif est la pièce maîtresse du microscope (figure 3). En plus de contribuer à son grossissement, l'objectif détermine le pouvoir de résolution de l'appareil, c'est-à-dire sa capacité à imager distinctement deux détails proches de l'objet. Augmenter ce pouvoir de résolution nécessite de travailler avec l'objectif en dehors des conditions de Gauss, en acceptant des rayons très inclinés par rapport l'axe optique (ce résultat sera démontré dans la deuxième partie).

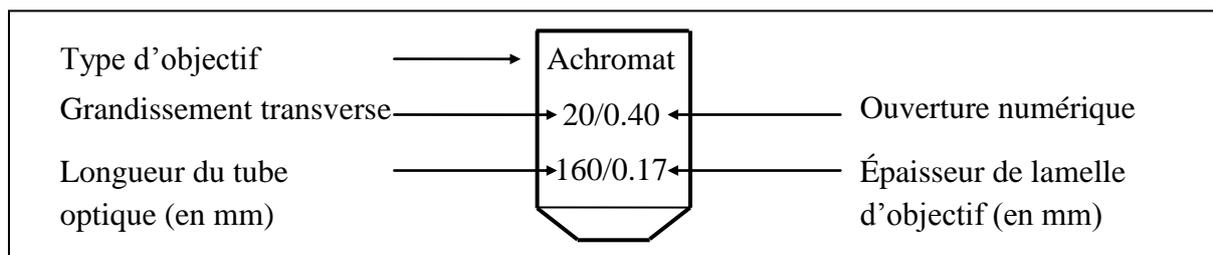


Figure 3 – Caractéristiques d'un objectif de microscope

On caractérise l'ouverture d'un objectif en donnant son ouverture numérique ω_0 , définie par

$$\omega_0 = n \sin u,$$

avec n l'indice du milieu dans lequel plonge l'objectif du côté de l'objet et u l'angle maximum, par rapport à l'axe optique, des rayons issus de l'objet qui traversent le diaphragme d'ouverture (figure 4).

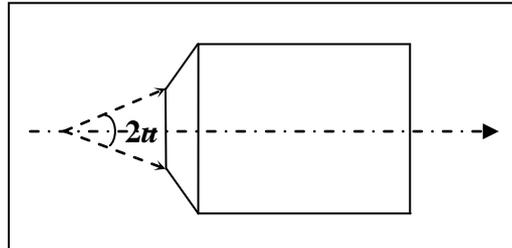


Figure 4 – Angle u d'ouverture maximale de l'objectif

- 17) Évaluer numériquement, en degrés, l'angle u pour deux objectifs secs (l'objectif plonge dans l'air d'indice optique n_0 égal à 1,00) d'ouvertures numériques respectives 0,25 (de grandissement $\times 10$) et 0,85 (de grandissement $\times 60$). Comparer ces valeurs à celles des angles usuels de l'optique paraxiale et commenter.
- 18) Citer et présenter succinctement des aberrations géométriques qu'il sera nécessaire de corriger au niveau de ces objectifs.

Un exemple d'objectif corrigé des aberrations : l'objectif d'Amici-Lister

Le naturaliste anglais Joseph Lister conçut vers 1830 des objectifs achromatiques (figure 5) constitués de deux doublets corrigés des aberrations chromatiques pour deux longueurs d'onde et rigoureusement stigmatiques pour le couple de points réels (A_L , A_{L1}). Les aberrations géométriques limitent l'ouverture numérique de ce type d'objectifs à environ 0,25.

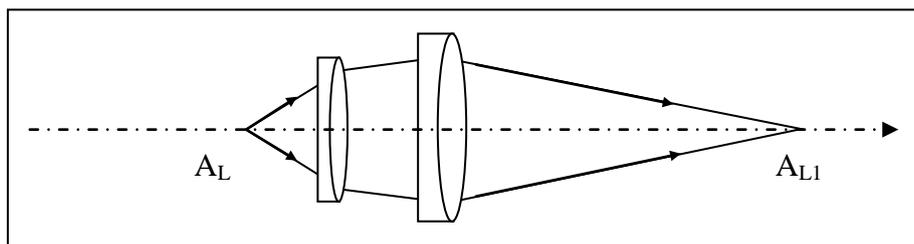


Figure 5 – Objectif de Lister

- 19) Décrire brièvement le phénomène d'aberration chromatique sur l'exemple d'une lentille. Chaque doublet de l'objectif de Lister est constitué de deux lentilles accolées. Indiquer les propriétés optiques distinctes que ces lentilles en verre doivent posséder pour rendre l'objectif achromatique.
- 20) Rappeler, sur l'exemple de cet objectif, la définition du stigmatisme rigoureux de cet instrument d'optique pour le couple de points A_L et A_{L1} .

Une solution pour dépasser cette ouverture numérique de 0,25 fut proposée par le physicien italien Giovanni Amici vers 1840. Il proposa de placer devant les doublets de Lister des ménisques formés chacun de deux dioptres sphériques (figure 6).

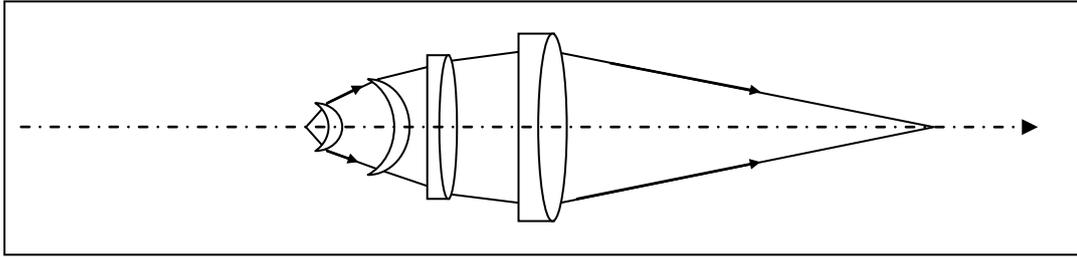


Figure 6 – Objectif achromatique de Lister-Amici

Un dioptre sphérique (figure 7) séparant deux milieux d'indice n et n' est rigoureusement stigmatique pour les points de sa surface (confondus avec leur image), pour son centre C (confondu avec son image) et pour les points d'Young-Weierstrass W et W' . Ces points W et W' sont conjugués et leurs positions sont définies par $\overline{CW} = -\frac{n'}{n}\overline{CS}$ et $\overline{CW'} = -\frac{n}{n'}\overline{CS}$. Les positions relatives des trois points W , W' et C dépendent donc du rapport des indices n et n' .

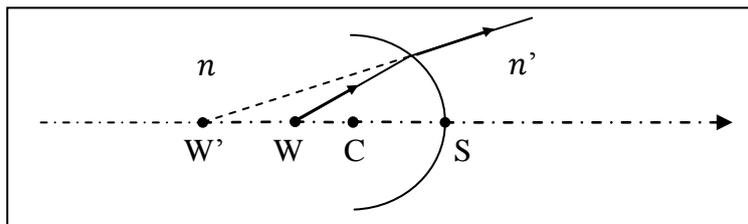


Figure 7 – Points de Weierstrass d'un dioptre sphérique (schéma effectué pour $n' < n$)

Les ménisques d'Amici (figure 8) sont limités par deux dioptres sphériques de centres C_1 et C_2 et de sommets S_1 et S_2 , tels que C_1 coïncide avec le point de Weierstrass objet W_2 du second dioptre. Le ménisque (d'indice optique $n_v = 1,50$) est plongé dans l'air d'indice n_0 .

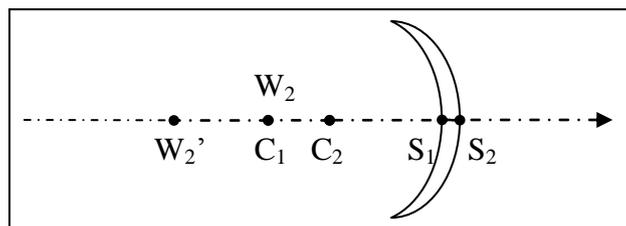


Figure 8 – Ménisque d'Amici

- 21) Préciser, en justifiant la réponse, la position de l'objet ponctuel de l'axe optique pour lequel le ménisque est rigoureusement stigmatique. On donnera également la position de son image conjuguée (on pourra faire un schéma illustratif).
- 22) Le rapport de transformation de convergence est le rapport $\sin(\theta')/\sin(\theta)$ entre les sinus des angles d'un rayon émergent et de son rayon incident par rapport à l'axe optique d'un système optique centré. Dans le cas d'un ménisque d'Amici, ce rapport vaut n_0/n_v . Justifier que deux ménisques suffisent pour pouvoir utiliser correctement

l'objectif achromatique de Lister dont l'ouverture numérique vaut 0,25 et obtenir un objectif sec de Lister-Amici d'ouverture numérique supérieure à 0,50.

- 23) En partant de la position de l'objet déterminée à la question 21, indiquer précisément comment les deux ménisques d'Amici et les doublets de Lister doivent être respectivement placés les uns par rapport aux autres afin que soit obtenue une image finale réelle stigmatique de l'objet à travers l'objectif complet d'Amici-Lister.

La condition d'aplanétisme des objectifs : relation d'Abbe

Afin de réaliser un bon objectif, il est nécessaire d'étendre le stigmatisme au voisinage de l'axe optique. Considérons un objectif rigoureusement stigmatique pour un couple de points conjugués de l'axe optique A et A₁. On montre qu'il est possible d'étendre le stigmatisme à un couple de points B et B₁, placés respectivement au voisinage de A et A₁ dans des plans perpendiculaires à l'axe optique, à condition de respecter la relation restrictive suivante, découverte par le physicien allemand Ernst Abbe

$$n\overline{AB}\sin\theta = n_1\overline{A_1B_1}\sin\theta_1.$$

Dans cette relation, θ désigne l'angle entre l'axe optique et un rayon incident quelconque issu de A, θ_1 désigne l'angle entre l'axe optique et le rayon émergent pointant vers A₁, n et n_1 les indices des milieux incident et émergent (figure 9). Les instruments stigmatiques qui satisfont à la condition précédente des sinus d'Abbe sont qualifiés d'aplanétiques. On montre que les instruments d'optique utilisés dans l'approximation de Gauss vérifient automatiquement la relation d'Abbe.

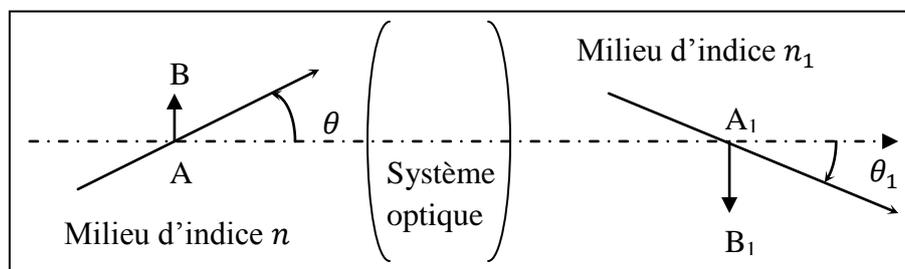


Figure 9 – Condition d'aplanétisme d'Abbe d'un système optique

- 24) On note u_1 le maximum de l'angle θ_1 des rayons sortant de l'objectif (et entrant dans l'oculaire). Déterminer littéralement l'ouverture numérique $n_1\sin(u_1)$ de l'oculaire en fonction des propriétés de l'objectif. On supposera que la relation d'Abbe est vérifiée pour l'objectif.

Le milieu de sortie est de l'air d'indice $n_1 = n_0 = 1,00$. Évaluer numériquement l'angle u_1 pour l'objectif de la figure 3. L'oculaire doit-il, comme l'objectif, être corrigé des aberrations, et si oui, desquelles ?

Pour les trois questions suivantes, on admet que les différentes relations trouvées dans les parties 1.1 et 1.2 restent valables. En dehors du verre des lentilles, le milieu est de l'air d'indice $n_0 = 1,00$.

- 25) Donner la relation entre l'angle u_1 , Δ et le rayon R_{DO} du diaphragme d'ouverture (on supposera que le diaphragme d'ouverture est toujours situé à une distance Δ du foyer objet F_2 de l'oculaire assimilé à une seule lentille convergente de distance focale f_2'). En déduire que ce rayon R_{DO} est directement proportionnel à l'ouverture numérique du microscope suivant la relation $R_{DO} = f_1' \omega_0$.
- 26) Exprimer le rayon R_{CO} du cercle oculaire, défini en question 14, en fonction de l'ouverture numérique ω_0 et de la puissance P_m du microscope.
- 27) En déduire que le microscope constitué de l'objectif de la figure 3 et d'un oculaire x10 s'adapte bien aux propriétés de l'œil de l'observateur qui fonctionne avec une pupille ouverte d'un rayon de l'ordre de 1 mm.

Les ménisques d'Amici sont justement aplanétiques au voisinage des positions définies aux questions 21 et 23 ; on obtient alors l'objectif de la figure 6 (stigmatique, aplanétique et de grande ouverture numérique) d'usage désormais obsolète mais dont le schéma directeur de conception reste toujours d'actualité pour la réalisation des objectifs de microscope.

2. Pouvoir séparateur du microscope optique

Dans toute cette partie, on supposera les lentilles parfaitement stigmatiques pour l'ensemble de l'espace objet et corrigées de toutes les aberrations. La lumière est monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide. En dehors des lentilles, le milieu de propagation des ondes lumineuses est linéaire, homogène et isotrope d'indice optique n .

2.1. Diffraction à l'infini d'une onde plane lumineuse

Une onde plane incidente monochromatique, de longueur d'onde λ dans le vide, arrive sur un écran opaque percé d'un diaphragme Σ rectangulaire, centré en O, de côtés a et b (on supposera que $a > b$), selon la direction du vecteur unitaire incident $\vec{u}_0 = \alpha_0 \vec{e}_x + \beta_0 \vec{e}_y + \gamma_0 \vec{e}_z$ (figure 10). On rappelle que l'amplitude scalaire de l'onde diffractée à l'infini dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$ s'exprime en notation complexe :

$$\underline{s}(\vec{u}, \vec{u}_0) = \underline{K} \underline{s}_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(P) e^{i \frac{2\pi n}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma.$$

\underline{K} est une constante et \underline{s}_0 est l'amplitude de l'onde incidente en O. Dans les hypothèses de G. Kirchhoff, le facteur de transmission $\underline{t}(P)$, défini pour un écran opaque percé d'un diaphragme transparent, vaut +1 si le point P appartient au diaphragme et 0 si P appartient à l'écran opaque.

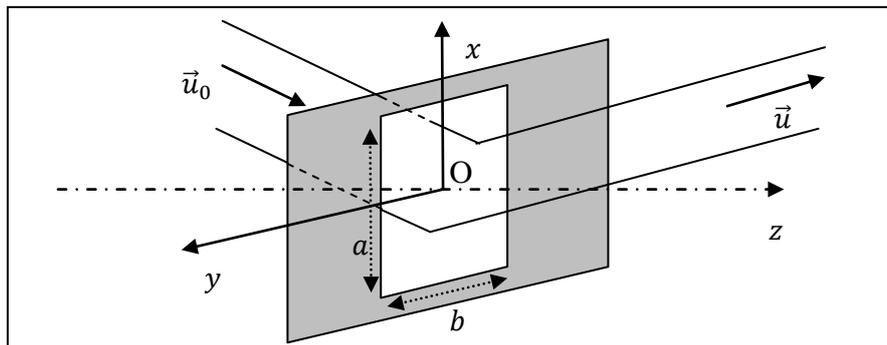


Figure 10 – Diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire

- 28) Calculer l'intensité lumineuse $I(\vec{u}, \vec{u}_0)$ diffractée par l'ouverture rectangulaire dans la direction du vecteur \vec{u} (on notera I_0 la valeur maximale de l'intensité) en fonction de $I_0, \lambda, n, \alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0, a$ et b .

On place une lentille L de foyer image F' et de distance focale image f' en aval du diaphragme précédent (figure 11). On suppose que cette lentille travaille dans les conditions de Gauss, les calculs pourront être menés à l'ordre 1 en certaines grandeurs à préciser. On observe l'éclairement lumineux sur un écran placé dans le plan focal image de cette lentille. Un point M de ce plan est repéré par les coordonnées X et Y dans le repère cartésien de centre F' et d'axes (F'X) et (F'Y), parallèles respectivement à (Ox) et (Oy).

- 29) Déterminer l'éclairement lumineux $E(X, Y)$ en un point M de l'écran de coordonnées X et Y en fonction de $E_0, \lambda, n, X, Y, f', \alpha_0, \beta_0, a$ et b (on notera E_0 l'éclairement maximal sur l'écran). Dessiner l'allure de la figure de diffraction observée à l'écran et donner la position et les dimensions de la tache principale de diffraction.

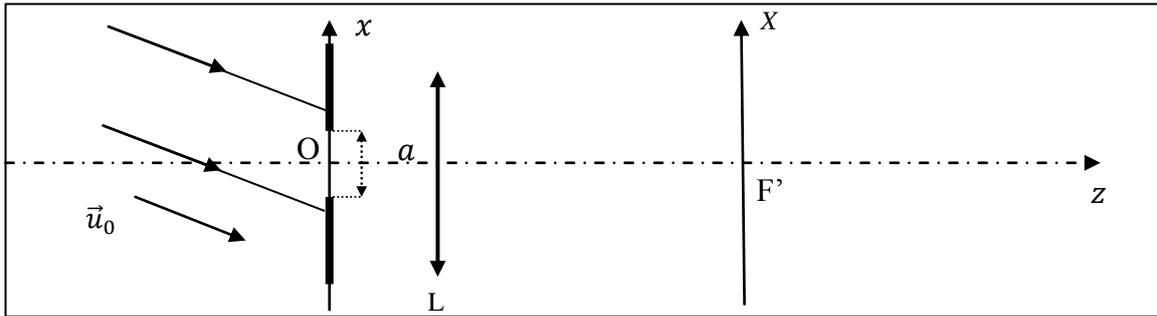


Figure 11 – Observation dans le plan focal d'une lentille (schéma en coupe dans le plan $y = 0$)

On remplace l'ouverture rectangulaire par une ouverture circulaire de rayon R (figure 12). On s'intéresse à l'intensité diffractée dans une direction inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe optique lorsque l'ouverture est éclairée par une onde plane incidente parallèle à l'axe (Oz).

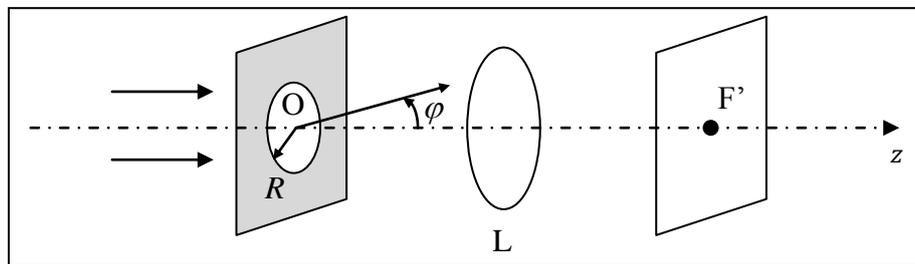


Figure 12 – Ouverture circulaire

30) Décrire et nommer la figure de diffraction observée à l'écran.

31) Le calcul de l'intensité diffractée conduit à l'expression :

$$I(\xi) = I_0 \left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right]^2,$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1 et $\xi = 2\pi n R \sin(\varphi) / \lambda$. La fonction $\frac{J_1(\xi)}{\xi}$ prend la valeur 1/2 en $\xi = 0$ et son premier zéro est obtenu pour $\xi_1 \approx 3,83$. En déduire la demi-largeur angulaire φ_1 de la tache centrale de cette figure de diffraction en fonction de R , λ , n et d'un facteur numérique que l'on déterminera.

2.2. Diffraction, formation des images et pouvoir séparateur en éclairage incohérent

Lentille et diffraction à l'infini

On étudie un système constitué de deux lentilles convergentes L_I et L_{II} , de distances focales images respectives f_I' et f_{II}' et de centres respectifs O_I et O_{II} , entre lesquelles on place un diaphragme circulaire de rayon R (figure 13). L'ensemble est centré sur l'axe $O_I O_{II}$. L'écran d'observation est placé dans le plan focal image de L_{II} , de foyer image F'_{II} .

On place au foyer objet F_I de L_I une source lumineuse A ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ et, à proximité, une seconde source lumineuse B ponctuelle monochromatique de même longueur d'onde et de même intensité que A , telle que (AB) soit parallèle à $(F'_{II} X)$.

Les deux sources ponctuelles A et B produisent des ondes incohérentes entre elles. On suppose par ailleurs que la diffraction n'est due qu'au diaphragme circulaire et que les lentilles travaillent dans les conditions de Gauss.

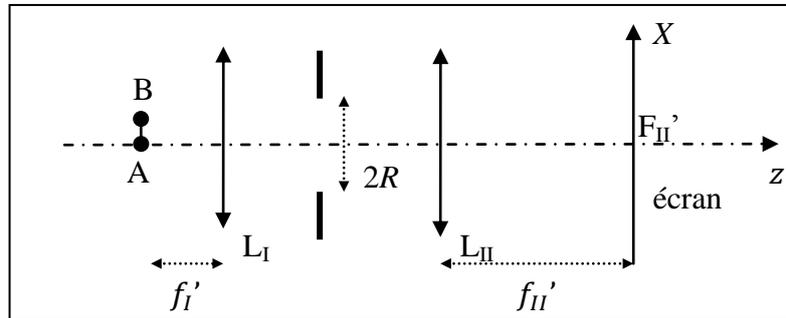


Figure 13 – Montage à deux lentilles

- 32) Donner la position des images géométriques A' et B' des objets ponctuels A et B à travers les deux lentilles et exprimer la distance $\overline{A'B'}$ séparant ces images en fonction de la distance \overline{AB} et des distances focales images f'_I et f'_{II} .
- 33) Rappeler la signification et l'origine de l'incohérence des ondes. Dessiner l'allure de l'éclairage observé dans le plan de l'écran, puis tracer son profil selon l'axe $F_{II}'X$ (on supposera les images A' et B' suffisamment « éloignées », ce qui sera précisé quantitativement au paragraphe suivant).

On considère désormais un montage (figure 14) comportant une unique lentille L de distance focale image f' , de monture circulaire de rayon R , conjuguant les points A et A' . On note les distances $AO = d$ et $OA' = d'$.

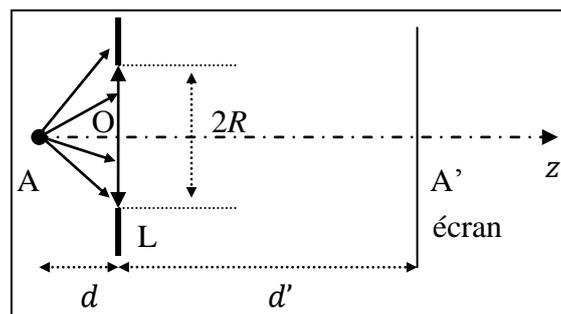


Figure 14 – Montage à une lentille

- 34) Expliquer en quoi ce montage est équivalent à celui de la figure 13 et préciser la correspondance des longueurs entre les deux montages. Conclure.

Pouvoir séparateur du microscope en éclairage incohérent : critère de Rayleigh

- 35) Afin de déterminer la limite de résolution de ce montage, on utilise le critère de Rayleigh. Expliciter ce critère. Exprimer la dimension minimale r'_{min} entre deux points images A' et B' pour qu'ils soient résolus, en fonction de λ , n et de l'angle u_3 , défini par la moitié de l'angle sous lequel on voit le diaphragme depuis A' .

36) Dans un microscope, le diaphragme responsable de la diffraction est le diaphragme d'ouverture du microscope, de rayon R_{DO} , que l'on supposera dans les questions 36, 37, 38 au niveau de la lentille de l'objectif. Montrer à l'aide de la relation d'Abbe (définie en partie 1.3.) que la dimension minimale (ou limite) de résolution r_{min} entre deux points A et B de l'objet vaut, en fonction notamment de l'ouverture numérique ω_0 (définie en partie 1.3.),

$$r_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{\omega_0}.$$

37) Indiquer alors comment on peut améliorer le pouvoir de résolution d'un microscope. Pour un microscope à objectif sec fonctionnant sous une lumière visible, donner l'ordre de grandeur de sa résolution minimale.

38) On considère un microscope d'ouverture numérique $\omega_0 = 0,40$, de puissance $P_m = 800 \delta$ éclairé par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$. Calculer la limite de résolution de ce microscope due à la diffraction. L'œil possède une limite de résolution angulaire de 1 minute d'angle liée à sa structure rétinienne. Calculer la limite de résolution oculaire imposée par l'œil. Comparer ces deux limites et conclure qui de l'œil ou de la diffraction limite la résolution du microscope visuel (c'est-à-dire le microscope avec l'œil pour capteur final).

2.3. Diffraction, formation des images et pouvoir séparateur en éclairage cohérent

Si la notion précédente de séparation de deux points sources incohérents s'applique bien, par exemple, à l'observation de deux astres voisins par un télescope, elle ne s'applique pas de manière totalement satisfaisante au microscope dont l'usage est plutôt d'observer un objet éclairé par une source lumineuse relativement proche, qui présente toujours de fait un certain degré de cohérence spatiale : deux points de l'objet éclairé sont alors assimilables à deux sources secondaires cohérentes entre elles.

À partir des années 1870, Ernst Abbe réalise une série d'expériences dans le but d'étudier le pouvoir de résolution des microscopes. Une de ces expériences consiste à placer un réseau sous l'objectif du microscope en l'éclairant à l'aide d'un faisceau parallèle à l'axe optique et quasi monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide (figure 15). Abbe utilise un réseau par transmission constitué de traits fins parallèles à l'axe des y , espacés d'un pas a . Ce réseau est placé dans le plan focal objet du microscope complet (sa position A sur l'axe optique a été évaluée en question 11), on l'observe donc à l'infini à travers le microscope. L'ensemble est plongé dans un milieu d'indice n .

Le réseau est un des objets présentant la périodicité la plus simple de sources (secondaires) cohérentes et l'expérience d'Abbe cherche à évaluer la capacité du microscope à résoudre cette périodicité de l'objet réseau.

Dans la suite de cette partie 2.3, on modélise le microscope avec deux lentilles minces pour l'objectif et l'oculaire, comme dans les parties 1.1 et 1.2.

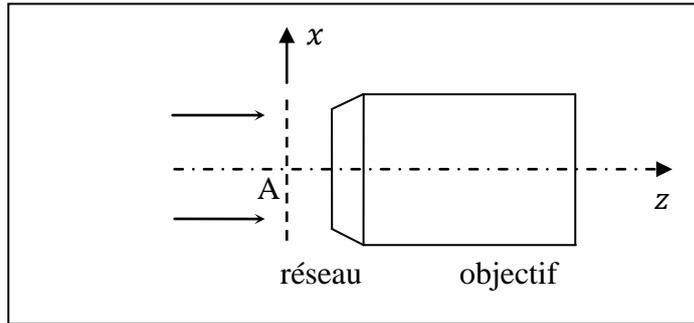


Figure 15 – Expérience d'Abbe (1873)

39) Décrire ce que l'on observerait sur un écran placé dans le plan du diaphragme de champ D_C du microscope.

Les réseaux à transmission

- 40) Le réseau est éclairé sous incidence normale par un faisceau parallèle monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide. Etablir la formule des réseaux donnant, en fonction de n , λ et a , les directions angulaires des ordres principaux de diffraction à l'infini.
- 41) Montrer que l'observation du premier ordre permet de déterminer le pas du réseau. En déduire une condition sur l'angle maximum u des rayons entrant dans l'objectif permettant d'observer cet ordre à travers le microscope.

Pouvoir de résolution en éclairage cohérent et filtrage spatial du microscope optique

- 42) Déterminer le pas minimal résolu par le microscope en fonction de son ouverture numérique et de la longueur d'onde λ . Comparer à la limite de résolution obtenue en lumière incohérente, commenter.
- 43) Démontrer, en utilisant l'expression de la partie 2.1., que l'amplitude diffractée à l'infini dans la direction de $\vec{u} = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$ par un objet de phase de facteur de transmission $\underline{t}(x, y)$ éclairé sous incidence normale \vec{e}_z , peut se mettre sous la forme

$$\underline{s}(\vec{u}) = \underline{K} \underline{s}_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(x, y) e^{i2\pi n \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right)} dx dy.$$

- 44) Cette amplitude diffractée est proportionnelle à la transformée de Fourier spatiale de l'amplitude $\underline{s}_0 \cdot \underline{t}(x, y)$ de l'objet. Par analogie avec l'analyse de Fourier des signaux temporels, définir les fréquences spatiales f_x et f_y en fonction de n , α , β et λ .
- 45) En déduire les principales fréquences spatiales présentes dans le spectre de l'objet de phase qu'est le réseau de pas a .
- 46) Compléter le document réponse n°2 en prolongeant les trois séries de rayons correspondant aux ordres 0, -1 et +2 à travers l'objectif et l'oculaire.

- 47) Indiquer ce que l'on observerait si l'on mettait un écran dans le plan focal image de l'objectif. Expliquer l'appellation de plan de Fourier donnée à ce plan.
- 48) Justifier que l'objectif ainsi que le diaphragme d'ouverture (L_1 et D_0) réalisent un filtrage passe-bas du signal diffracté.
- 49) On remplace le réseau par une grille plane au motif carré de côté a formée par des fils horizontaux et verticaux. Décrire ce que l'on observerait sur un écran placé dans le plan du diaphragme de champ D_C du microscope si l'on place dans son plan de Fourier : une fente fine horizontale centrée sur F_1' de largeur inférieure à $\lambda f'/na$, une fente fine verticale centrée sur F_1' de largeur inférieure à $\lambda f'/na$, un trou circulaire centrée en F_1' de rayon inférieur à $\lambda f'/na$.
- 50) Proposer un montage réalisant un filtrage passe-haut du signal diffracté par la grille et indiquer l'allure de l'image observée. Citer une technique optique utilisant un filtrage passe haut des signaux optiques diffractés par un objet.

3. Microscopie optique de fluorescence

La microscopie de fluorescence est un outil très utilisé que l'on va appliquer, dans cette partie, à la mesure d'un coefficient de diffusion.

3.1. Une microscopie optique de fluorescence

51) Décrire le phénomène de fluorescence d'une molécule. Préciser si les photons émis lors de l'émission de fluorescence ont une direction privilégiée. En déduire la propriété que doit posséder l'objectif du microscope (figure 3) si l'on souhaite détecter un maximum de lumière.

52) Dans un microscope de fluorescence, on trouve généralement, en plus des éléments d'optique conventionnels, un filtre d'excitation, un filtre d'émission et un miroir dichroïque (figure 16). L'objectif joue le double rôle de focaliser la lumière incidente sur l'échantillon et de collecter la lumière que celui-ci renvoie. Donner le rôle de ces trois filtres et tracer, sur un même schéma, l'allure de leur facteur de transmission en fonction de la longueur d'onde.

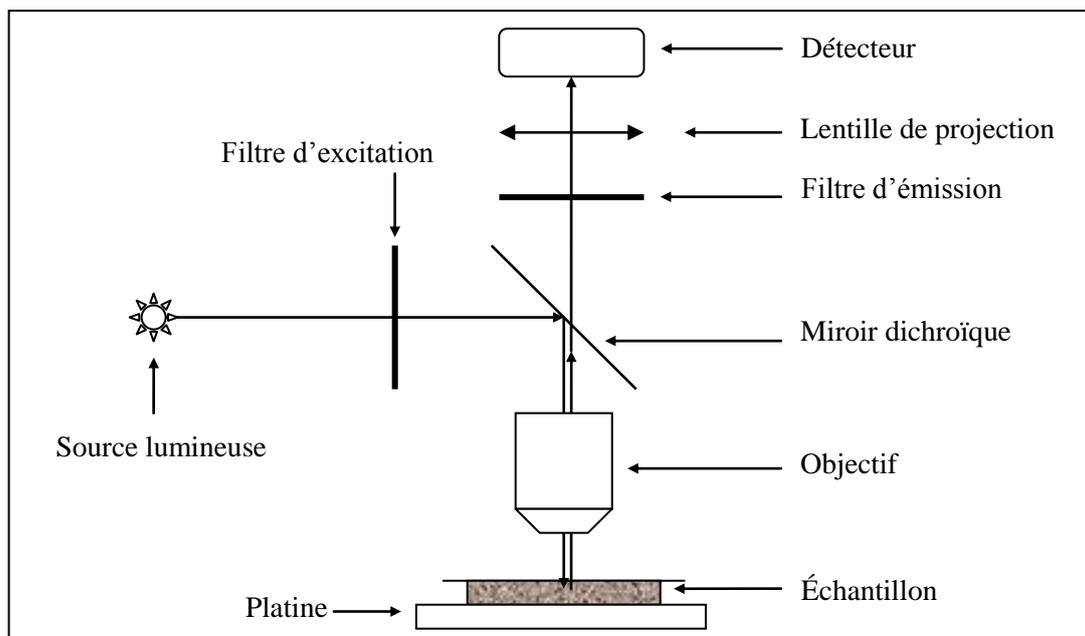


Figure 16 – Schéma d'un microscope de fluorescence

3.2. Imagerie microscopique et localisation d'objets ponctuels

En microscopie, on est souvent amené à faire des mesures quantitatives en utilisant comme détecteur final non pas l'œil mais un capteur. La partie oculaire du microscope est modifiée afin de fournir une image finale non plus à l'infini mais sur le capteur. Le microscope, devenu projectif au lieu de visuel, est désormais caractérisé par son grandissement transverse g que l'on prendra égal à $1,0 \times 10^3$. On rappelle que le critère de Rayleigh a permis d'établir en question 36 une limite de résolution $r_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{\omega_0}$ entre deux points sources incohérents du champ objet.

- 53) Le capteur plan est formé d'une matrice de pixels que l'on supposera carrés de côté a . Selon que la taille de l'image d'un objet ponctuel est supérieure ou inférieure à la taille d'un pixel, décrire l'image de cet objet ponctuel sur ce capteur.
- 54) Dans le cas d'une image bien plus grande que le pixel, indiquer comment on peut déterminer expérimentalement la position du centre de la tache.
- 55) On note N le nombre de photons détectés par image en provenance d'un point source, $a = 8,0 \mu\text{m}$ la taille du pixel du capteur et r' la taille de la tache sur le capteur. Thompson *et al.*¹ ont démontré que, si le bruit de fond ou le bruit de la caméra ne sont pas gênants, on peut estimer la précision sur la position du centre de cette « tache » par l'incertitude

$$\Delta x = \sqrt{\frac{r'^2 + a^2/12}{N}}.$$

Estimer l'ordre de grandeur du rayon r' de la tache puis la précision de pointé de son centre dans le cas où on détecte $1,0 \times 10^4$ photons durant une image. Commenter la résolution en position que l'on obtient dans le champ objet.

- 56) Dater l'établissement du critère de Rayleigh à une décennie près et indiquer s'il s'agit d'un critère absolu. Nommer le(s) détecteur(s) utilisé(s) à l'époque. Comparer la précision de pointé Δx à la limite de résolution déduite du critère de Rayleigh. Commenter ce que devient ce critère avec les détecteurs actuels.

3.3. Applications à la mesure d'un coefficient de diffusion

On observe au microscope des molécules fluorescentes en solution dont on souhaite mesurer le coefficient de diffusion D en utilisant leur fluorescence.

- 57) Énoncer la loi de Fick et préciser l'origine de cette loi. Établir l'équation de diffusion. On notera c la concentration des molécules en un point donné pour un instant donné.
- 58) On considère une situation unidimensionnelle associée à une distribution initiale de concentration égale à $c(y, t = 0) = c_0 \delta(y)$, l'axe des y est un axe orthogonal à l'axe optique du microscope et $\delta(y)$ est la distribution de Dirac. On cherche à montrer que l'évolution temporelle de cette distribution initiale suit, du fait de la diffusion, la loi :

$$c(y, t) = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}.$$

Une technique de résolution de l'équation de diffusion en régime variable consiste à décomposer la fonction $c(y, t = 0)$ par transformée de Fourier spatiale, à chercher l'évolution temporelle de chaque composante de Fourier, puis à obtenir $c(y, t)$ par transformée de Fourier inverse.

¹ R. E. Thompson, D. R. Larson and W. W. Webb. Precise nanometer localization analysis for individual fluorescent probes. *Biophysical Journal*, 2002, vol. 82 (5), p. 2775-2783.

Ecrire l'équation de diffusion vérifiée par une composante de Fourier $C(k, t)$ quelconque de la concentration $c(y, t)$.

Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $c(y, t)$ par transformation de Fourier inverse. Représenter graphiquement $c(y, t)$ en fonction de y à différents instants et commenter.

- 59) On veut maintenant donner l'évolution temporelle, en fonction notamment de D et de c_0 , d'un profil initial donné par $c(y, 0) = c_0$ si $y < 0$ et 0 si $y > 0$. En utilisant le fait que $c(y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(y', 0)\delta(y' - y)dy'$ et en utilisant les résultats de la question précédente, montrer dans un premier temps que

$$c(y, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(y'-y)^2}{4Dt}} dy',$$

puis, par intégration, que

$$c(y, t) = \frac{c_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right),$$

où $\operatorname{erf}(x)$ est la fonction erreur définie en début d'énoncé. Représenter graphiquement $c(y, t)$ en fonction de y à différents instants et commenter.

- 60) Pour de faibles intensités d'excitation, indiquer le type de relation entre la concentration locale en molécules fluorescentes et l'intensité du signal lumineux reçue sur le détecteur. Expliquer comment le suivi temporel de l'image de fluorescence sur la caméra permet de déterminer le coefficient de diffusion. La détermination est-elle possible quelle que soit la direction de la diffusion ?

On peut également mesurer le coefficient de diffusion dans un solvant en écoulement stationnaire en utilisant une technique de microfluidique. La molécule étudiée est mise en solution. Cette solution est injectée dans le « bras » A d'un dispositif en Y (figure 17). La même solution mais sans molécules fluorescentes est injectée dans le « bras » B du dispositif. On suppose que la présence de molécules fluorescentes ne modifie pas les propriétés physiques de la solution, en particulier sa viscosité.

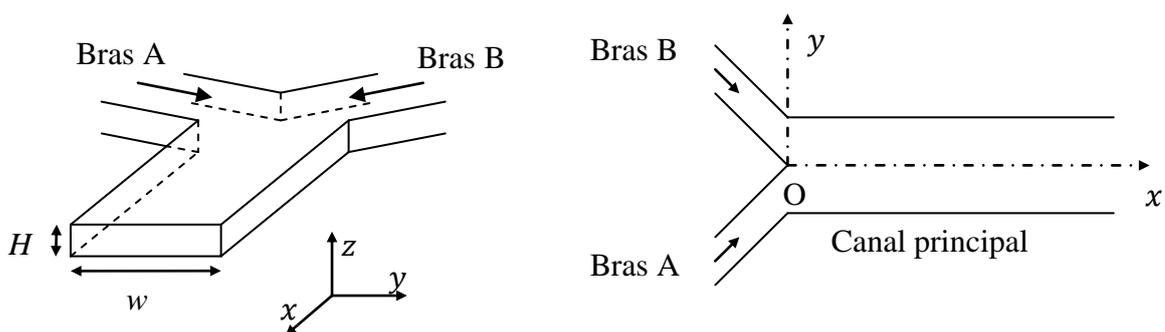


Figure 17 – Dispositif microfluidique en Y

On se place en régime permanent. Les dimensions des canaux d'entrée sont telles que l'on peut considérer qu'ils sont « infinis » dans leur direction principale, et ainsi négliger ce qui se passe près de la zone d'injection des solutions en amont du point O où les deux solutions sont mises en contact. Le canal principal est de largeur w très supérieure à sa hauteur H selon la direction z . Dans la suite, on prendra $w = 100 \mu\text{m}$ et $H = 10,0 \mu\text{m}$.

- 61) Estimer numériquement les temps caractéristiques de diffusion des molécules dans le solvant (de coefficient de diffusion dans le solvant $D = 1,0 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) sur la hauteur des canaux ainsi que sur leur largeur w . Conclure.
- 62) Les vitesses caractéristiques d'écoulement sont de l'ordre de $20 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la viscosité dynamique de la solution ainsi que sa masse volumique restent proches de celles de l'eau. Estimer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Donner l'allure des lignes de courant dans ces conditions.
- 63) Compte tenu de la fluorescence, décrire l'image du canal principal dans le cas où on néglige la diffusion des molécules fluorescentes de la solution A vers la solution B puis décrire l'image dans le cas réel où on prend en compte cette diffusion.
- 64) Indiquer la relation entre la position x le long du tube et la durée t depuis la mise en contact (en O, à l'abscisse $x = 0$ du tube principal) des deux solutions qui se trouvent désormais à la cote x . En déduire le profil spatial de l'intensité $I(x, y)$ en régime permanent compte tenu des résultats obtenus à la question 59 en l'absence de mouvement de la solution.
- 65) Expliquer comment l'analyse de l'image de fluorescence sur la caméra détectrice permet de déterminer le coefficient de diffusion D . Comparer cette méthode à celle de la question 60 sans mouvement de la solution.

4. Microscopie électronique

4.1. Caractère ondulatoire des électrons

En 1924, Louis de Broglie émet l'hypothèse qu'il est possible d'associer à tout corpuscule matériel, de quantité de mouvement \vec{p} et d'énergie E , une onde de fréquence ν et de longueur d'onde λ définies par des relations données dans le document 1 issu de sa thèse. Cette hypothèse fut notamment confirmée par Clinton Davisson et Lester Germer en 1927 à la suite d'expériences commencées huit années plus tôt et décrites dans le document 2. Répondre aux questions suivantes en s'appuyant sur ces deux documents :

- 66) Exprimer la longueur d'onde de de Broglie associée à des électrons non relativistes accélérés sous une tension U en supposant qu'ils sont initialement immobiles.
- 67) Rappeler succinctement en quoi l'expérience de Rutherford à laquelle se réfère Davisson a permis de sonder la matière.
- 68) Émettre des hypothèses sur les transformations qu'a subi l'échantillon durant l'accident ainsi qu'au cours du retraitement qui en a suivi, en particulier le traitement à chaud sous dihydrogène.
- 69) Indiquer la technique qui permettait à l'époque de connaître la structure du nickel et de mesurer son paramètre de maille a .
- 70) En exploitant quantitativement le pic de diffraction maximum, expliquer précisément pourquoi cette expérience a fourni une confirmation expérimentale quantitative de l'hypothèse de de Broglie.
- 71) Expliquer pourquoi les réseaux sous-jacents à celui de la surface ne modifient pas la position des principaux ordres de diffraction mais peuvent influencer sur l'intensité de ceux-ci.

4.2. Pouvoir de résolution d'un microscope électronique

Afin de dépasser la limite de résolution de la microscopie optique, on peut remplacer les photons par des électrons dont on exploite le caractère ondulatoire. Le microscope électronique à transmission présente des éléments similaires à ceux du microscope optique : une source d'électrons munie d'un condenseur permettant d'envoyer un faisceau d'électrons sur l'échantillon, un objectif (à base de lentilles magnétiques) et un système de projection vers les détecteurs électroniques. Néanmoins, la difficulté de réalisation de lentilles magnétiques stigmatiques explique la faible valeur de l'ouverture numérique des microscopes électroniques comparativement à celle des microscopes optiques.

- 72) Le canon à électrons de la source accélère des électrons initialement au repos sous une tension U . Exprimer la vitesse acquise par les électrons en fonction de m , e , c et U en se plaçant désormais en mécanique relativiste où l'énergie cinétique et la quantité de mouvement d'un électron valent respectivement $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ et $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, en notant

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

73) Déterminer numériquement la vitesse et la longueur d'onde associée à des électrons accélérés sous une tension de 100 kV en supposant qu'ils ne changent plus d'énergie cinétique une fois sortis du canon à électrons.

74) On admet que la limite de résolution du microscope est égale, comme en microscopie optique, à $0,61\lambda/\omega_0$. Calculer la limite de résolution obtenue avec les électrons précédents dans un microscope d'ouverture numérique $\omega_0 = 0,020$. Déterminer le nombre d'ordres de grandeur gagnés par rapport à la microscopie optique.

Document 1 : extraits de la thèse de Louis de Broglie (1924)²

(p.32-33)

Une des plus importantes conceptions nouvelles introduites par la Relativité est celle de l'inertie de l'énergie. D'après Einstein, l'énergie doit être considérée comme ayant de la masse et toute masse représente de l'énergie. La masse et l'énergie sont toujours reliées l'une à l'autre par la relation générale :

$$\text{énergie} = \text{masse} \times c^2$$

c étant la constante dite « vitesse de la lumière » [...]

Il nous semble que l'idée fondamentale de la théorie des quanta soit l'impossibilité d'envisager une quantité isolée d'énergie sans y associer une certaine fréquence. Cette liaison s'exprime par ce que j'appellerai la relation du quantum :

$$\text{énergie} = h \times \text{fréquence}$$

h constante de Planck [...]

On peut donc concevoir que par suite d'une grande loi de la Nature, à chaque morceau d'énergie de masse propre m_0 soit lié un phénomène périodique de fréquence ν_0 telle que l'on ait :

$$h\nu_0 = m_0c^2$$

ν_0 étant mesurée, bien entendu, dans le système lié au morceau d'énergie.

(p.111)

Si les vitesses sont assez faibles pour permettre de négliger les termes de Relativité, la longueur d'onde liée au mouvement d'une molécule dont la vitesse est v , sera³ :

$$\lambda = \frac{\frac{c}{\beta}}{\frac{m_0c^2}{h}} = \frac{h}{m_0v}$$

² Louis de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta*, Faculté des Sciences de Paris, 1924, Thèse de doctorat (Annales de Physique, 10^{ème} série, 1925, p. 22-128).

³ $\beta = \frac{v}{c}$.

Document 2 : l'expérience de Davisson et Germer (1927)

En 1928, Davisson décrit les motivations⁴ qui l'ont amené à la confirmation des hypothèses de de Broglie ; ses collaborateurs et lui observèrent en 1919 qu'une cible métallique bombardée par un faisceau d'électrons diffuse élastiquement une partie des électrons. Ils imaginèrent un processus de diffusion similaire à celui des particules alpha de l'expérience de Rutherford et cherchèrent à l'utiliser pour sonder la matière.

Leur expérience consistait à étudier l'intensité électronique diffusée par une cible en nickel bombardée par un faisceau d'électrons, supposés homocinétiques, produits par une source constituée d'un canon à électrons (figure 18 à gauche) qui les accélère sous une tension U . Cette intensité diffusée est reportée sur une courbe de diffusion angulaire (figure 18 au centre) où l'intensité diffusée $I(\theta)$ à l'angle θ est proportionnelle à la longueur du segment joignant le point d'impact O à la courbe.

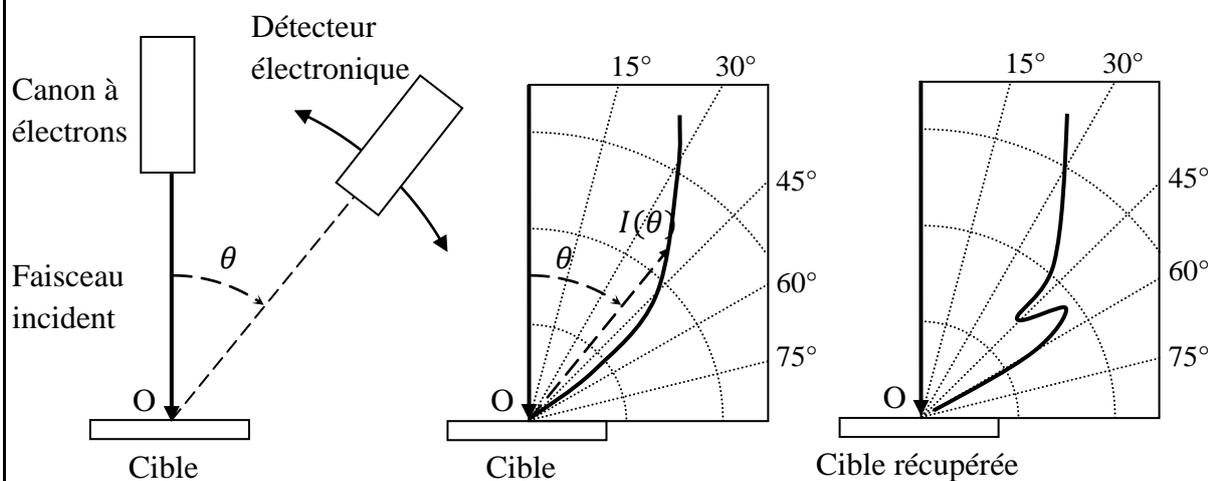


Figure 18 – Schéma de la manipulation de Davisson et Germer et courbes d'intensité diffusée par la cible en nickel et la cible récupérée après l'accident

Un des tournants de cette expérience fut un accident survenu en 1925⁵ au cours duquel une bouteille d'air comprimé explosa dans le laboratoire, entraînant la destruction du dispositif à vide qui contenait la cible en nickel et provoquant une profonde altération de l'échantillon. Afin de pouvoir réutiliser cet échantillon, les scientifiques lui firent subir des chauffages importants sous vide et sous atmosphère de dihydrogène. Les nouvelles courbes de diffusion prirent alors une toute autre allure et présentèrent notamment des pics d'intensité pour des tensions d'accélération et des angles bien précis (figure 18 à droite).

Ce n'est qu'à la fin de l'année 1926, à la suite d'un congrès où Max Born parla des ondes de matière de de Broglie et de la mécanique ondulatoire de Schrödinger, que Davisson et Germer comprirent leurs résultats : l'échantillon de nickel monocristallin diffracte les électrons de la même façon qu'il diffracte les rayons X.

⁴ Davisson, C.J.. The Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel. *Bell System Tech. J.* (USA : American Tel. & Tel.), 1928, vol. 7 (1), p. 90-105.

⁵ C. Davisson, L. H. Germer. Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel. *Physical Review*, 1927, vol. 30 (6), p. 705-740.

Davisson et Germer reprirent alors leurs expériences sur un échantillon monocristallin de nickel à structure cubique à faces centrées, de paramètre de maille $a = 352$ pm, bombardé selon la direction perpendiculaire à la face notée 111 (figure 19).

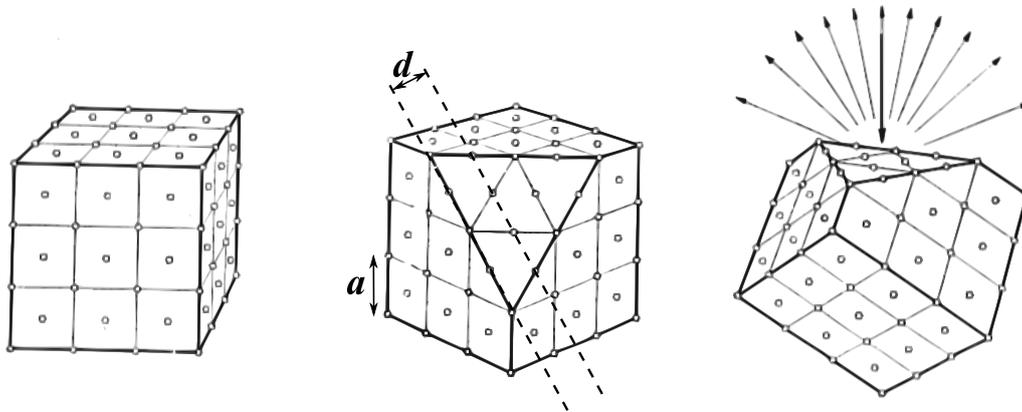


Figure 19 – Schémas de la structure cristalline du nickel, d'une coupe et des faisceaux électroniques incidents et diffusés

La direction azimutale d'observation fut également modifiée (figure 20), mettant en évidence un pic de diffraction maximum dans la direction azimutale A, pour une tension d'accélération de 54 V et sous un angle θ de 50° (figures 21 et 22). En suivant une analyse de Davisson, on peut voir le cristal comme une superposition de réseaux plans de diffraction perpendiculaires à l'axe du faisceau incident ; ces réseaux étant constitués de lignes parallèles d'atomes distantes de d (figure 19) orthogonales à la direction azimutale d'observation A. On peut alors raisonner uniquement sur le premier plan ; les réseaux du dessous influent sur l'intensité diffractée mais ne modifient pas les angles principaux de diffraction.

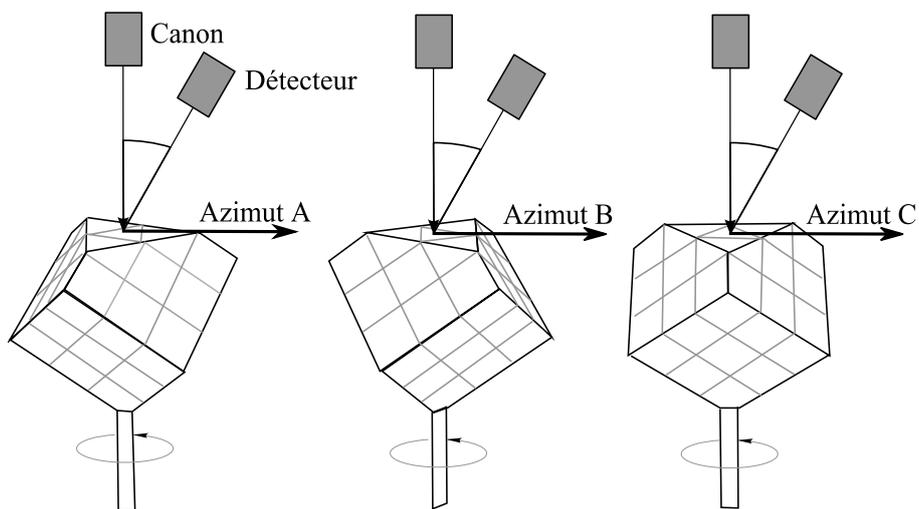


Figure 20 – Directions azimutales A, B et C de diffusion

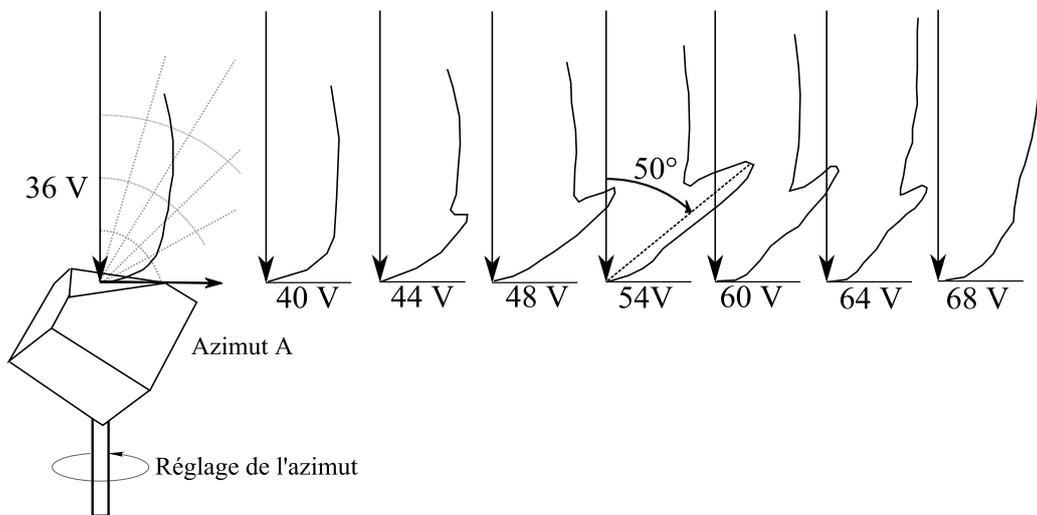


Figure 21 – Courbes d'intensité sous l'azimut A pour différentes tensions d'accélération

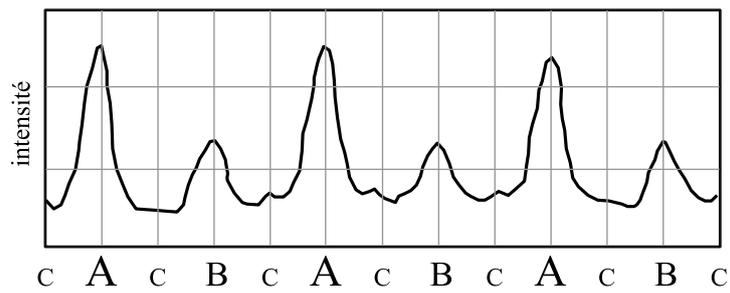


Figure 22 – Intensité diffusée sous 54 V et 50° pour différentes directions azimutales

5. Microscopie à effet tunnel

5.1. Effet tunnel

On considère dans cette partie des électrons qui arrivent depuis le domaine $z < 0$ sur une barrière de potentiel rectangulaire unidimensionnelle (figure 23) de hauteur V et de largeur a ,

$$V(z) = V \text{ si } z \in [0, a], \\ V(z) = 0 \text{ si } z \notin [0, a].$$

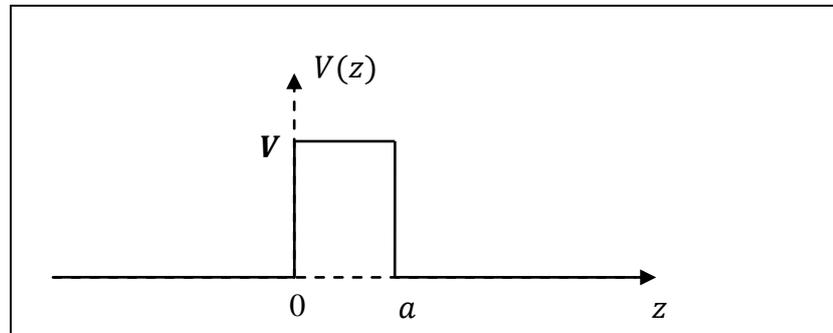


Figure 23 – Barrière de potentiel rectangulaire

On associe aux électrons d'énergie totale $E < V$, une fonction d'onde stationnaire $\Psi(z, t) = \psi(z)e^{-iEt/\hbar}$ et un vecteur courant de probabilité $\vec{J}(z, t) = \frac{\hbar}{2im}(\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}}\Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}}\Psi^*)$. La fonction d'onde électronique vérifie l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} + V(z)\Psi(z, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t}.$$

75) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction d'espace $\psi(z)$.

76) On cherche une solution de l'équation de Schrödinger de la forme suivante (avec k et k' grandeurs positives)

$$\psi(z) = \begin{cases} e^{ikz} + \alpha e^{-ikz} & z \leq 0 \\ \gamma e^{-k'z} + \delta e^{k'z} & 0 \leq z \leq a \\ \beta e^{ikz} & z \geq a \end{cases}$$

Exprimer k et k' en fonction de E , V , \hbar et m et donner une interprétation des différents termes e^{ikz} , αe^{-ikz} , $\gamma e^{-k'z}$, $\delta e^{k'z}$ et βe^{ikz} . On indiquera également pourquoi n'apparaît pas de terme en e^{-ikz} dans le domaine $z \geq a$.

77) On définit le coefficient de transmission T à travers la barrière par le rapport du flux d'électrons transmis par le flux d'électrons incidents. Montrer que T est égal à $|\beta|^2$.

78) La prise en compte des conditions aux limites au niveau de la barrière aboutit à l'expression

$$T(k) = \frac{4k^2 k'^2}{4k^2 k'^2 + (k^2 + k'^2)^2 \text{sh}^2(k'a)}.$$

Montrer que dans le cas où $k'a \gg 1$, on obtient la forme approchée

$$T(E) \approx \frac{16E(V-E)}{V^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}a}.$$

79) Ce coefficient $T(E)$ tend vers zéro dans les trois cas limites suivants : $(V-E) \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$ (ou $m \rightarrow \infty$). Indiquer la signification physique de ces trois cas limites.

5.2. Application à l'étude des électrons libres métalliques à 0 K

Gaz d'électrons libres dans un métal

On considère un solide métallique parallélépipédique rectangle de volume $\Omega = L_1 L_2 L_3$ (L_1 , L_2 et L_3 sont les longueurs des côtés suivant respectivement les axes (Ox), (Oy) et (Oz)), à l'intérieur duquel N électrons peuvent se déplacer librement dans les trois directions de l'espace ; ils forment un gaz d'électrons libres évoluant dans une région de potentiel nul délimitée de bordures de potentiels supposés très élevés.

Les électrons sont caractérisés par leur vecteur d'onde $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$, leur quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, leur énergie cinétique (non relativiste) $E_c(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ et leur fonction d'onde stationnaire de la forme $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{-iEt/\hbar}$.

80) Les conditions aux limites périodiques (conditions de Born - Von Karman) imposent que la fonction d'onde de chaque électron soit périodique aux frontières du solide. En déduire que les composantes k_x, k_y, k_z du vecteur d'onde ne peuvent prendre que certaines valeurs quantifiées que l'on exprimera en fonction des dimensions L_1, L_2 ou L_3 du solide.

81) Montrer alors que la densité d'états électroniques $g(\vec{k})$ (spin compris) par unité de volume dans l'espace des vecteurs d'onde \vec{k} est égale à $g(\vec{k}) = 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3}$. Justifier le principe à appliquer lors du remplissage de ces différents états électroniques par les électrons du métal.

82) Exprimer la relation intégrale entre N , $g(\vec{k})$ et k_F , module du vecteur d'onde de Fermi correspondant au plus haut niveau énergétique occupé par un électron du métal à 0 K. En déduire l'expression de k_F en fonction de N et de Ω .

83) On suppose que le cuivre fournit un électron libre par atome. Déterminer numériquement la densité volumique N/Ω d'électrons libres du cuivre à partir des données fournies en introduction. En déduire les valeurs numériques de k_F et de l'énergie de Fermi E_F correspondante (que l'on exprimera en eV).

Description de la jonction tunnel - Courant tunnel à 0 K

On place deux blocs d'un même métal, de même volume Ω , en vis-à-vis à une distance a (figure 24). On suppose le système invariant par translation selon les axes x et y , l'énergie potentielle des électrons ne dépend que de leur coordonnée selon l'axe z . Le diagramme énergétique des électrons est donné pour une tension U positive entre les deux blocs (figure

24). W est le travail de sortie du métal, défini comme l'énergie minimale nécessaire pour extraire un électron du métal. On suppose que la tension est suffisamment faible pour avoir $eU \ll E_F$ et $eU \ll W$ et on fera les simplifications qui s'imposent dans les calculs.

84) À température nulle, justifier que les électrons de vecteur d'onde \vec{k} susceptibles de passer du bloc de gauche au bloc de droite par effet tunnel doivent respecter les conditions suivantes

$$\begin{cases} k_z > 0 \\ E_F - eU < \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F \end{cases}$$

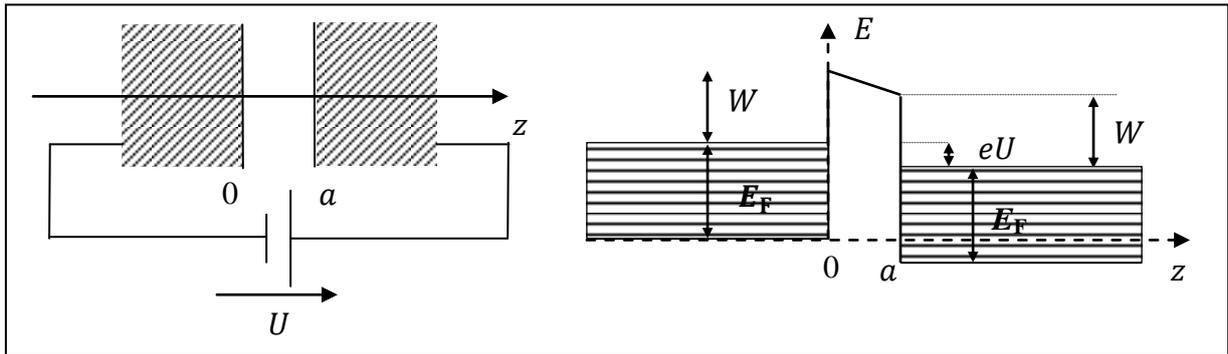


Figure 24 – Jonction tunnel sous tension U et niveaux d'énergie électronique

85) Calculer le volume $d\tau_k$ de l'espace des vecteurs d'onde \vec{k} occupé par les électrons vérifiant les conditions précédentes d'effet tunnel et dont le vecteur d'onde fait un angle avec l'axe z compris entre θ et $\theta + d\theta$.

86) En déduire que le nombre d'électrons correspondant vaut $dN = \Omega \frac{meU}{2\pi^2\hbar^2} k_F \sin(\theta) d\theta$.

87) On démontre dans le cadre du modèle BKW (Brillouin, Kramers, Wentzel) que moyennant les approximations $\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} a \gg 1$, $eU \ll E_F$ et $eU \ll W$, le coefficient de transmission d'électrons d'énergie E à travers une barrière trapézoïdale s'exprime encore de manière satisfaisante selon la formule de la partie 5.1. Montrer alors que pour les électrons susceptibles de passer la barrière par effet tunnel, le coefficient de transmission $T(E)$ est de la forme

$$T(E) \approx \frac{16E_F W}{(E_F + W)^2} e^{-2k'a},$$

où l'on exprimera k' en fonction de W , m et \hbar .

88) Déterminer alors le nombre dN' d'électrons transmis par effet tunnel dont le vecteur d'onde fait un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$ avec l'axe z .

89) Déterminer la contribution dj_{ez} de ces dN' électrons à la composante du vecteur densité de courant électrique \vec{j}_e selon l'axe z . Montrer que ce vecteur peut se mettre

sous la forme $\vec{j}_e = -CUe^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a}\vec{e}_z$ où C est une grandeur caractéristique du matériau ne dépendant ni de a , ni de U et que l'on ne demande pas de déterminer.

5.3. Résolutions du microscope à effet tunnel

Dans un microscope à effet tunnel, la première électrode est une pointe métallique très fine et la seconde électrode est l'échantillon (figure 25). Lorsque la pointe est suffisamment proche de l'échantillon et que l'on applique une tension entre ces électrodes, un courant électronique faible mais mesurable peut traverser par effet tunnel l'espace entre ces électrodes. Ce courant tunnel dépend notamment de la distance entre les électrodes. Des actionneurs mécaniques permettent de déplacer la pointe et de balayer la surface de l'échantillon avec précision.

Microscopie tunnel

90) Dater, à une décennie près, l'invention du microscope à effet tunnel. Expliquer en quoi ce dispositif permet de réaliser une image topographique de la surface d'un échantillon.

Résolution transversale

Le modèle unidimensionnel présenté en partie 5.2 permet de mettre en évidence l'influence de la tension U et de la distance a sur le courant tunnel entre les surfaces métalliques mais ne permet pas d'évaluer la résolution latérale du microscope à effet tunnel.

En 1987, W. Sacks propose une estimation de cette résolution fondée sur le modèle de J. Tersoff et D.R. Hamann de la jonction tunnel pointe-plan. Dans leur approche, on suppose que seul l'atome terminal de la pointe (figure 25) participe au courant tunnel et que le flux surfacique de courant tunnel entre cet atome et un point M de la surface de l'échantillon est proportionnel au facteur en $e^{-2k'r}$ où r est la distance du centre de courbure O de l'atome au point M et k' la constante introduite à la question 87.

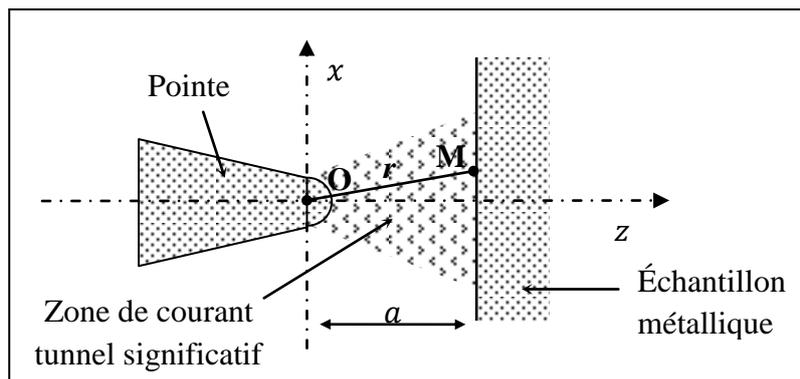


Figure 25 – Jonction tunnel pointe - plan

91) Dans le plan de la surface de l'échantillon, en un point M de coordonnées x et $z = a$ tels que $x \ll a$, montrer que $e^{-2k'r} \approx e^{-2k'a}e^{-\frac{k'x^2}{a}}$ et que cette fonction décroît latéralement sur une demi-largeur à mi-hauteur Δx que l'on exprimera en fonction de a et k' .

- 92) Justifier que cette largeur Δx est une bonne évaluation de la limite de résolution latérale du microscope à effet tunnel. Estimer numériquement son ordre de grandeur sachant que $a = 0,50 \text{ nm}$, $W = 4,3 \text{ eV}$.

Résolution longitudinale (topographique)

La théorie de Tersoff et Hamann permet d'établir que le courant tunnel I est de la forme

$$I = C' U \frac{k'}{a} e^{-2k'a},$$

avec C' une constante. Lorsque l'on souhaite obtenir la topographie de la surface d'un échantillon, on peut utiliser le mode de balayage de la surface à courant constant. On fixe la tension U et lors du balayage parallèlement au plan moyen de l'échantillon on asservit la position verticale de la pointe afin de maintenir le courant tunnel constant.

- 93) Sachant qu'on ne peut pas distinguer des variations relatives de courant de moins de 2 %, évaluer la variation Δa minimale que l'on peut résoudre verticalement et estimer l'ordre de grandeur de la résolution longitudinale du microscope à effet tunnel.
- 94) Donner la nature des actionneurs mécaniques permettant de régler la position de la pointe avec une telle précision.