

Étude d'un nano-résonateur électro-mécanique

I – Rappels généraux sur l'oscillateur harmonique

1. $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -Kz\vec{e}_z$.

On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen, la force de rappel étant la seule force considérée ici, on a :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ -Kz &= m\ddot{z} \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0\end{aligned}$$

avec $\omega_0^2 = K/m$.

2. La solution générale est : $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Pour déterminer cette solution, il y a deux grandeurs à déterminer : l'amplitude z_0 et la phase φ . Il faut donc deux conditions initiales pour déterminer entièrement le mouvement. On a $\omega_0 = \sqrt{K/m}$.
3. On ajoute la force de frottement au bilan de forces et le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m\ddot{z} = -Kz - \gamma m\dot{z}$$

qui se réécrit en :

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

4.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}Kz^2$$

avec

$$\dot{z} = -\frac{\gamma}{2}z_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi) - z_0 \omega_0 e^{-\gamma t/2} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Comme $\gamma \ll \omega_0$, on a : $\dot{z} \simeq -z_0 \omega_0 e^{-\gamma t/2} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2}mz_0^2\omega_0^2 e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}Kz_0^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}mz_0^2\omega_0^2 e^{-\gamma t} [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 z_0^2 e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}Kz_0^2 e^{-\gamma t}\end{aligned}$$

5. L'énergie perdue par l'oscillateur pendant la durée $1/\omega_0$ vaut :

$$\Delta E = E_m(t) - E_m(t + 1/\omega_0) = \frac{1}{2} K z_0^2 e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma/\omega_0}) \simeq \frac{1}{2} K z_0^2 e^{-\gamma t} (\gamma/\omega_0)$$

On en déduit :

$$Q = \left| \frac{E_m}{\Delta E} \right| = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

N.B. : La définition de Q proposée par l'énoncé est valable pour la valeur moyenne de l'énergie calculée à la question précédente. Si on veut calculer l'énergie dissipée en utilisant le travail de la force de frottements (qui est périodique), il faut revenir à la définition standard $Q = 2\pi E / \Delta_T E$ où $\Delta_T E$ est l'énergie dissipée sur une période. Les deux approches donnent évidemment le même résultat.

6. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe z s'écrit en variables complexes :

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z - \gamma \dot{z} + \underline{F}/m$$

On cherche les solutions complexes sous la forme $z(t) = \underline{z}^\omega e^{j\omega t}$.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$[-\omega^2 \underline{z}^\omega + j\gamma\omega \underline{z}^\omega + \omega_0^2 \underline{z}^\omega] e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

qui donne immédiatement :

$$\underline{z}^\omega = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma}$$

On en déduit le module et la phase de \underline{z}^ω :

$$z^\omega = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

et

$$\phi = \arctan \frac{\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

pour $\omega < \omega_0$ et

$$\phi = \arctan \frac{\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} - \pi$$

pour $\omega > \omega_0$.

7. Au voisinage de ω_0 , on peut écrire : $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$.

On en déduit :

$$\underline{z}^\omega = \frac{F_0/m}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + j\omega_0\gamma} = \frac{F_0/(2m\omega_0)}{(\omega_0 - \omega) + j\gamma/2}$$

soit

$$\underline{z}(t) = \frac{F_0/(2m\omega_0)}{(\omega_0 - \omega) + j\gamma/2} e^{j\omega t}$$

8. La puissance fournie par l'opérateur, et donc reçue par le système, vaut $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Pour des grandeurs complexes, on obtient directement la puissance moyenne par $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{F} \cdot \vec{v}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{v} \cdot \vec{F}^*)$.

Avec $\underline{v}(t) = j\omega \underline{z}^\omega e^{j\omega t}$, on déduit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(j\omega F_0 \underline{z}^\omega) \simeq \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \frac{j\omega_0[(\omega_0 - \omega) - j\gamma/2]}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \right\}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\frac{F_0^2 \gamma}{8m}}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (1)$$

9. L'allure de la courbe de résonance est représentée sur la figure 1. Le maximum est atteint à la résonance ω_0 et vaut $\mathcal{P} = \frac{F_0^2}{2m\gamma}$. La mi-hauteur est donc atteinte pour les pulsations $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ telles que :

$$\frac{F_0^2}{4m\gamma} = \frac{F_0^2 \gamma}{8m} \frac{1}{(\Delta\omega/2)^2 + (\gamma/2)^2}$$

soit

$$(\Delta\omega/2)^2 + (\gamma/2)^2 = \gamma^2/2$$

D'où la largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\omega = \gamma = \omega_0/Q$$

On retrouve que la facteur de qualité peut être défini comme le rapport de la fréquence de résonance à la largeur à mi-hauteur.

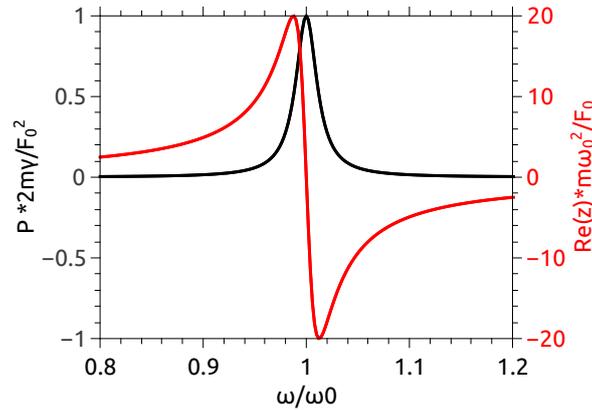


FIGURE 1 – Allure de la courbe de résonance en puissance (noir, échelle de gauche) et de la partie réelle de l'amplitude complexe (rouge, échelle de droite). Les grandeurs sont données en unités réduites et calculées pour un oscillateur de facteur de qualité $Q = 40$.

10. De la question 7, on déduit :

$$\text{Re}(\underline{z}^\omega) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} = \frac{2F_0}{m\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{4(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0/Q)^2}$$

L'allure de la variation de cette quantité avec la fréquence est représentée en rouge sur la figure 1. On note qu'elle s'annule à la résonance et atteint ses extrema à la fréquence correspondant à la mi-hauteur de la courbe de résonance en puissance. Par ailleurs, ses extrema valent $\pm Q/2$ c'est à dire la moitié de l'amplitude maximale du déplacement de l'oscillateur en unités réduites ($z/[F_0/(m\omega_0^2)]$).

11. Quelques exemples de systèmes physiques décrits par un oscillateur harmonique :
 - (a) circuit RLC en électronique
 - (b) vibrations dans un système moléculaire
 - (c) dipôle électrique porté par un atome (modèle de l'électron élastiquement lié)
 - (d) ...

Explicitons le dernier exemple dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié : le dipôle instantané est $\vec{p} = -ez\vec{e}_z$ où e est la charge élémentaire. z la coordonnée de l'oscillateur représente dans ce cas la séparation des barycentres des charges positives et négatives. La potentiel quadratique modélise le rappel de l'électron par le noyau. Le terme de dissipation représente l'amortissement du dipôle par exemple sous l'effet du rayonnement électromagnétique (émission spontanée). La fréquence propre peut couvrir tout le spectre électromagnétique. Dans le cas d'une transition atomique dans le visible, on a $f \simeq 10^{15}$ Hz. La durée de vie ($1/\gamma$) est typiquement de l'ordre de la nanoseconde, ce qui conduit à un facteur de qualité de l'ordre de 10^6 .

II – Étude mécanique

1. Ordres de grandeur

12. L'allure du potentiel d'interaction entre deux atomes de carbone plus proches voisins est donnée sur la figure 2. À très courte distance on a une forte répulsion entre les nuages électroniques, à distance intermédiaire on a un minimum d'énergie d'interaction (orbitale liante) tandis qu'à grande distance le potentiel d'interaction tend rapidement vers 0 (les deux atomes neutres n'interagissent plus).
13. Sur un périmètre πd_0 du cylindre, on a environ $\pi d_0/a_{C-C}$ liaisons. Par ailleurs sur la longueur L , on a environ L/a_{C-C} liaisons. Au total, pour le tube entier, on estime à $N = \frac{\pi d_0 L}{a_{C-C}^2}$ le nombre total de liaisons carbone-carbone. (On a négligé le détail de la structure hexagonale du cristal.)
14. Pour une déformation de 100% (doublement de longueur), on peut estimer que la distance carbone-carbone est également doublée. En ordre de grandeur, l'énergie d'interaction s'est accrue d'environ $E_{C-C} = 5$ eV comme on peut s'en convaincre en observant la figure 2. En effet, à 100% de déformation, la plupart des matériaux cristallins quittent leur limite élastique : on sort très largement du minimum de potentiel.
15. L'énergie totale déposée correspond au travail de la force appliquée. En ordre de grandeur, on a $W = F_0 L$. Or par définition $F_0/A = \sigma = B(\Delta L)/L = B$ pour une déformation de 100%. D'où $W = ABL = \pi d_0^2 BL/4 \simeq Bd_0^2 L$. Ce travail est estimé par excès puisque, comme on l'a vu précédemment, on quitte la limite élastique avant d'avoir atteint une déformation de 100%.

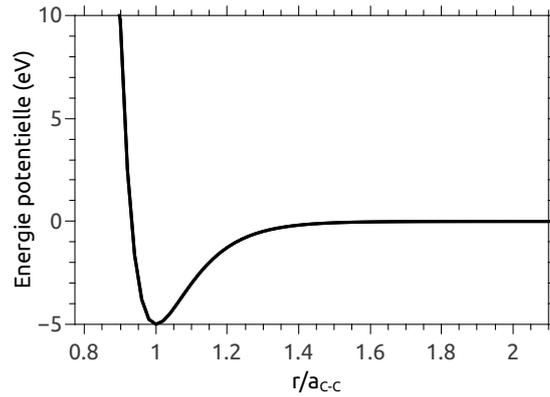


FIGURE 2 – Allure du potentiel d'interaction entre deux atomes de carbone plus proches voisins. Le minimum d'énergie correspond à l'énergie de liaison (5 eV); ce minimum est atteint à la distance d'équilibre a_{C-C} .

16. Cette énergie reçue correspond à l'accroissement d'énergie d'interaction entre les atomes de carbone. D'où :

$$NE_{C-C} = W$$

$$\frac{\pi d_0 L}{a_{C-C}^2} E_{C-C} = Bd_0^2 L$$

dont on déduit :

$$B \simeq \pi \frac{E_{C-C}}{d_0 a_{C-C}^2}$$

A.N. : $B = 100$ GPa.

L'ordre de grandeur est compatible avec les mesures. La grande disparité de ces mesures reflète la difficulté à accéder à cette grandeur sur un nano-objet individuel. Elle reflète aussi la grande sensibilité de cette grandeur à des caractéristiques mal connues de l'objet étudié, telles que sa qualité cristalline, particulièrement critique pour un objet quasi-unidimensionnel.

2. Modes propres de vibration

Modes de tension

17. Sur la portion de nanotube de longueur dx , le bilan des forces s'établit comme représenté sur la figure 3.

Le principe fondamental de la dynamique sur la portion de nanotube de longueur $dl \simeq dx$ s'écrit :

$$\mu dx \vec{a}(x, t) = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

La projection sur l'axe (Ox) permet de montrer (en utilisant $\ddot{x} = 0$ et $\cos \alpha \simeq 1$) que la norme de la tension reste uniforme le long du tube : $|\vec{T}(x, t)| = T_0$.

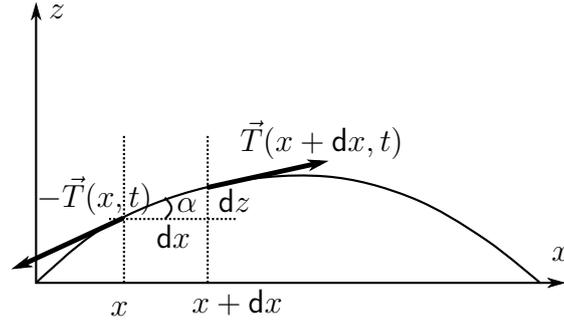


FIGURE 3 – Bilan de forces sur une portion élémentaire du nanotube en tension, à un instant t donné.

En projetant sur l'axe (Oz) , on obtient :

$$\begin{aligned} \mu dx \ddot{z} &= T_0 \sin(\alpha + d\alpha) - T_0 \sin \alpha \\ &= T_0 (\sin \alpha + \cos \alpha d\alpha - \sin \alpha) \\ &= T_0 d\alpha \end{aligned}$$

car $\cos \alpha \simeq 1$ à l'ordre 1. Par définition de l'angle d'inclinaison local $\alpha(x, t)$, on a : $\tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \simeq \alpha$. On en déduit :

$$\mu \ddot{z} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

qui est l'équation de propagation des ondes dans cette approximation.

18. On trouve la relation de dispersion en injectant la solution en ondes planes harmoniques $e^{j(\omega t - kx)}$ dans l'équation de propagation. On en déduit

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\mu}$$

On déduit la vitesse de phase par la définition

$$v_\varphi = c_t = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

On constate que cette vitesse ne dépend pas de la fréquence. Le milieu est donc non dispersif. Dans ce cas particulier, la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase et on peut parler de vitesse de propagation sans autre précision.

19. On cherche une solution harmonique stationnaire de pulsation ω de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle de la forme $z(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cos \omega t$. Les conditions aux limites imposent l'immobilité des extrémités du dispositif à tout instant. Elles s'écrivent : $z(0, t) = 0$ et $z(L, t) = 0$.

On en déduit : $A \cos \omega t = 0$ à tout instant, ce qui impose $A = 0$. La seconde condition impose : $B \sin kL \cos \omega t = 0$ à tout instant. En dehors de la solution triviale $B = 0$, cette condition impose $\sin kL = 0$, c'est-à-dire $kL = p\pi$ avec p entier naturel, soit $k = p\frac{\pi}{L}$. On en déduit les fréquences propres grâce à la relation de dispersion.

$$f_p = \omega_p / (2\pi) = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \frac{p\pi}{2\pi L} = p \frac{c_t}{2L}$$

20. Pour le mode fondamental, on a $\omega_0 = \frac{\pi c_t}{L}$. On déduit la raideur effective par la relation $K = m\omega^2$ qui, pour le mode fondamental s'écrit :

$$K_{\text{eff}} = m\omega_0^2 = \mu L \pi^2 \frac{c_t^2}{L^2}$$

soit

$$K_{\text{eff}} = \pi^2 \frac{T_0}{L}$$

Modes de flexion

21. Par définition de la courbure (rayon du cercle tangent local), on a en $z' = 0$: $dx = R_c d\theta$, et en $z' \neq 0$: $dx' = (R_c - z')d\theta$. Par soustraction, on déduit : $dx - dx' = z'd\theta$ et par suite :

$$\frac{dx' - dx}{dx} = -\frac{z'}{R_c}$$

22. On utilise la loi de Hooke, en notant que pour $z' > 0$ le nanotube est en compression (donc $\sigma < 0$) et la force à l'interface est orientée vers l'intérieur de la portion de nanotube. La situation est inversée pour $z' < 0$. On a alors

$$d^2 F_x(x) = -\sigma d^2 A = -B \frac{dx' - dx}{dx} d^2 A = B \frac{z'}{R_c} d^2 A$$

soit

$$d^2 F_x(x) = B z' \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d^2 A$$

Cette force est proportionnelle à z' et donc symétrique avec changement de signe de part et d'autre de la ligne neutre (figure 4). La force totale s'exerçant sur une section droite est donc nulle.

23. Le couple s'exerçant sur la portion élémentaire de nanotube s'écrit :

$$\vec{M}(x) = \iint_A \overrightarrow{O'M} \wedge d^2 \vec{F}(x)$$

avec

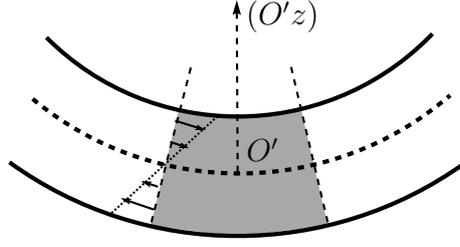


FIGURE 4 – Bilan des forces sur une section droite du tube.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'M} &= -\frac{dx}{2}\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z \\ d^2\vec{F} &= \frac{Bz'}{R_c}d^2A\vec{e}_x\end{aligned}$$

On remarque que la composante $M_z \propto y'z'$ s'annule par parité. Il vient donc :

$$\vec{M}_y(x) = \frac{B}{R_c} \iint_A z'^2 d^2A \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \frac{BI_y}{R_c} \vec{e}_y = BI_y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \vec{e}_y$$

avec $I_y = \iint_A z'^2 d^2A$.

24. Le moment de la composante verticale de la force qu'exerce la partie gauche du nanotube sur la portion élémentaire s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_y^{\text{gche}} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}_z(x) = -\frac{dx}{2} F_z(x) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = \frac{dx F_z(x)}{2} \vec{e}_y$$

Par principe des actions réciproques, $\vec{F}_{\text{drte} \rightarrow \text{portion}} = -\vec{F}_{\text{portion} \rightarrow \text{drte}} = -\vec{F}(x + dx)$.

On en déduit :

$$\vec{\Gamma}_y^{\text{drte}} = -\frac{dx}{2} \vec{e}_x \wedge F_z(x + dx) \vec{e}_z = \frac{dx}{2} F_z(x + dx) \vec{e}_y$$

25. Le moment total des forces s'exerçant sur la portion d'étude comprend le moment résultant de la déformation du tube et le moment de la composante verticale des forces s'exerçant sur chacune des deux sections droites délimitant la portion d'étude. L'approximation des petites déflexions consiste à négliger la rotation de la portion élémentaire et donc les variations de son moment cinétique. On en déduit que la somme des moments des forces s'exerçant sur cette portion est nulle à l'ordre 1. On a donc :

$$\vec{\Gamma}_y^{\text{gche}} + \vec{\Gamma}_y^{\text{drte}} + \vec{M}_y(x) + \vec{M}_y(x + dx) = \vec{0}$$

Or, par symétrie on a $\vec{M}_y(x + dx) = -M_y(x + dx)\vec{e}_y$, donc

$$M_y(x + dx) - M_y(x) = \frac{dx}{2} [F_z(x + dx) + F_z(x)]$$

D'où au premier ordre :

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} dx = \frac{dx}{2} [2F_z(x)]$$

qui, d'après la question 23, s'exprime sous la forme :

$$F_z(x) = BI_y \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

26. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la portion élémentaire de nanotube s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho A dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z &= f_z dx \vec{e}_z + \vec{F}_z^{\text{gche}}(x) + \vec{F}_z^{\text{drte}}(x + dx) \\ &= f_z dx \vec{e}_z + [F_z(x) - F_z(x + dx)] \vec{e}_z \\ &= f_z dx \vec{e}_z - \frac{\partial F_z}{\partial x} dx \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit

$$\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial F_z}{\partial x} = f_z$$

27. Des deux questions précédentes, on déduit :

$$\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + BI_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = f_z$$

28. En injectant la solution proposée par l'énoncé dans l'équation précédente, on obtient :

$$BI_y g''''(x) \cos(\omega t + \varphi) - \rho A \omega^2 g(x) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

qui se ramène à $g'''' = k^4 g$ si on identifie $k^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{BI_y} = \omega^2 \frac{\mu}{BI_y}$

Cette équation du quatrième degré admet quatre solutions $k_0, ik_0, -k_0$ et $-ik_0$ avec $k_0 = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\mu}{BI_y}}$.

29. Cette équation du quatrième ordre en g nécessite quatre conditions aux limites pour déterminer entièrement une solution. Pour un tube encastré, ces conditions sont : $g(0) = 0, g(L) = 0, g'(0) = 0$ et $g'(L) = 0$ (le nanotube reste horizontal au niveau des contacts du fait de l'encastrement).
30. Grâce à la courbe fournie en préambule de l'énoncé, on peut déterminer graphiquement les solutions de l'équation résultant des conditions aux limites. On trouve pour les deux premières solutions $k_0 L = 4,7$ et $k_0 L = 7,8$.
31. D'après la question 28, on connaît la relation entre la pulsation et le vecteur d'onde de chaque mode propre $\omega = \sqrt{\frac{BI_y}{\mu}} k_0^2$. On en déduit pour le fondamental et le premier mode excité :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{BI_y}{\mu}} \left(\frac{4,7}{L} \right)^2, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{BI_y}{\mu}} \left(\frac{7,8}{L} \right)^2$$

Numériquement, on trouve : $I_y = 4,9 \times 10^{-38} \text{ m}^4, \mu = 1,8 \times 10^{-15} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

D'où $\omega_0 = 5,1 \times 10^7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, \omega_1 = 1,4 \times 10^8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $f_0 = 8,2 \text{ MHz}, f_1 = 22 \text{ MHz}$.

32. En définissant la raideur effective par la relation $k_{\text{eff}} = m\omega_0^2$ (avec $m = \mu L$), on obtient :

$$k_{\text{eff}} = \frac{(4,7)^4 BI_y}{L^3}$$

33. L'approche la plus simple consiste à écrire que les effets de la tension sont négligeables si la raideur effective du mode fondamental de tension est très faible devant celle du mode de flexion. On trouve alors

$$T_0 \ll BI_y(4,7)^4/(\pi^2 L^2)$$

III – Excitation des vibrations

34. Par définition de la capacité d'un condensateur, on a $dq_g = C_g dV_g$. L'énergie d'une particule de charge dq plongée dans un potentiel V_g étant $V_g dq$, on déduit l'incrément d'énergie $dE = C_g V_g dV_g$. Par intégration, on déduit l'énergie du condensateur (l'autre électrode étant à la masse) :

$$E = \frac{1}{2} C_g V_g^2$$

35. Lors d'un déplacement élémentaire du nanotube à tension constante, la variation d'énergie du système (constitué des deux armatures du condensateur) correspond à la fois au travail de la force de l'opérateur qui déplace l'armature du condensateur et à l'énergie fournie par le générateur pour maintenir cette tension constante. Ce bilan s'écrit :

$$d\left(\frac{1}{2} C_g V_g^2\right) = F_{op} dz + V_g dq_g$$

Puisque V_g est constante, on a $V_g dq_g = d(V_g q_g)$. On en déduit :

$$d\left(\frac{1}{2} C_g V_g^2 - V_g q_g\right) = F_{op} dz$$

Or $q_g = C_g V_g$. On a donc $-d\left(\frac{1}{2} C_g V_g^2\right) = F_{op} dz$ et finalement :

$$\vec{F}_{op} = -\vec{\nabla} E = -\frac{1}{2} V_g^2 \frac{dC_g}{dz} \vec{e}_z$$

Finalement, dans le cadre d'un mouvement quasi-statique, on peut écrire que la force exercée par l'opérateur sur le nanotube \vec{F}_{op} est l'opposée de celle qu'exerce la grille sur le nanotube (notée \vec{F}_{el}). On en déduit :

$$\vec{F}_{el} = -\vec{F}_{op} = +\vec{\nabla} E = \frac{1}{2} V_g^2 \left. \frac{dC_g}{dh} \right|_h \vec{e}_z$$

En notant que $\frac{dC_g}{dh} < 0$, on retrouve bien que la force que les armatures d'un condensateur exercent l'une sur l'autre est attractive, puisque ces dernières portent des charges de signe opposé.

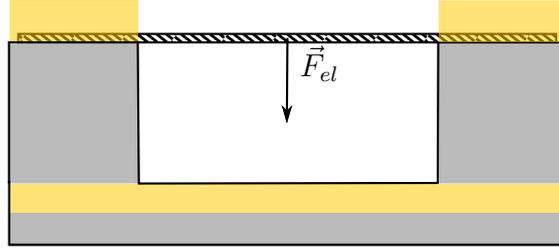


FIGURE 5 – Force électrostatique ressentie par le nanotube.

36. Par simple dérivation par rapport à h , on déduit :

$$C'_g(h) = -C_g \frac{1}{h \ln \frac{4h}{d_0}} = -\frac{C_g^2}{2\pi\epsilon_0 L h} = -\frac{2\pi\epsilon_0 L}{h \ln^2 \frac{4h}{d_0}}$$

Numériquement, on trouve : $C_g = 1,1 \times 10^{-17} \text{ F} = 11 \text{ aF}$ et $C'_g = -3,8 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.

37. On a vu que $F_{el} = \frac{1}{2}V_g^2 C'_g$. Pour $V_g = 1 \text{ V}$, on trouve $F_{el} = -1,9 \times 10^{-12} \text{ N}$. Par comparaison, le nanotube a une masse de $m = \rho AL = 2,7 \times 10^{-21} \text{ kg}$ et son poids vaut donc $mg = 2,7 \times 10^{-20} \text{ N}$. Il est donc plus faible que la force électrostatique d'environ 8 ordres de grandeur et est donc totalement négligeable.

38. En développant l'expression de la force électrostatique obtenue précédemment, on trouve :

$$F_{el} = \frac{1}{2}C'_g(V_g^{\text{DC}} + \tilde{V}_g)^2$$

En développant cette expression à l'ordre 1 en $\tilde{V}_g/V_g^{\text{DC}}$, on trouve :

$$F_{el} = \frac{1}{2}C'_g(V_g^{\text{DC}})^2 + C'_g V_g^{\text{DC}} \tilde{V}_g = F_{el}^{\text{DC}} + \tilde{F}_{el}$$

La composante DC peut servir à mettre le nanotube sous tension mécanique, tandis que la composante alternative permet une excitation sinusoïdale des vibrations. Cette action ne serait pas possible en l'absence de composante continue du fait de la dépendance quadratique en tension de la force électrostatique.

IV – Détection électrique des vibrations

39. L'allure du schéma de bandes d'un semi-conducteur au voisinage de son gap est donné sur la figure 6. Les états de la bande de valence (en bas) sont entièrement remplis tandis que ceux de la bande de conduction (en haut) sont vides, à température nulle. Le haut de la bande de valence est séparé du bas de la bande de conduction par une bande interdite dont l'énergie E_g est appelée "gap" du semi-conducteur.

40. Le niveau de Fermi correspond au potentiel chimique des électrons. Il est proche de l'énergie de l'état occupé de plus haute énergie à température nulle. Dans le cas d'un semi-conducteur intrinsèque (non dopé), ce niveau de Fermi est au milieu du gap. Pour un semi-conducteur dopé avec des impuretés donneuses (dopage n), le niveau de Fermi est proche du bas de la bande de conduction. À l'inverse, pour un dopage p

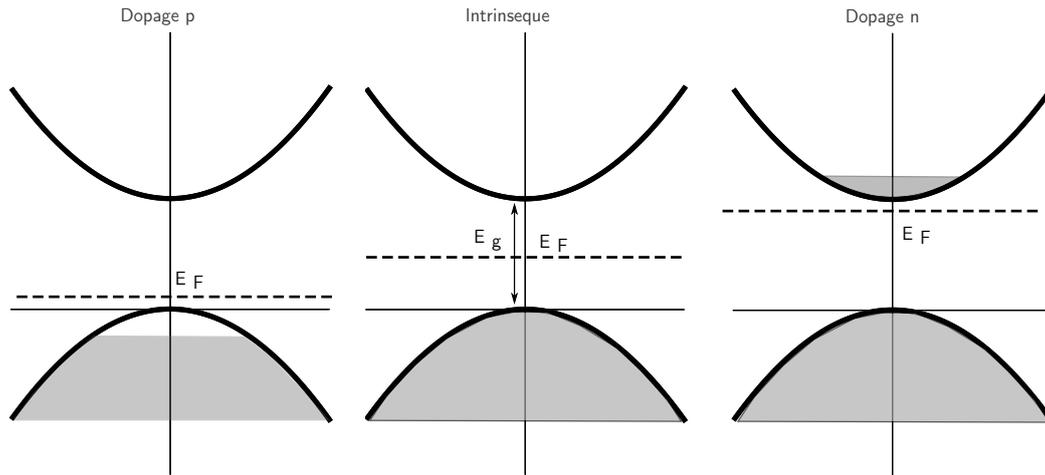


FIGURE 6 – Schéma de bandes d'un semi-conducteur (à gap direct) au voisinage de sa bande interdite dans les cas dopé p , intrinsèque et dopé n . L'axe vertical représente l'énergie et l'axe horizontal le vecteur d'onde dans une direction de l'espace réciproque. Les zones grisées représentent les états occupés par des électrons à température finie.

(impuretés accepteuses), il est proche du haut de bande de valence. À température non nulle, ceci conduit à une occupation partielle de la bande de conduction dans le cas d'un dopage n et à l'existence d'une certaine population de trous dans la bande de valence pour un dopage p . Cette distribution des porteurs à température finie est donnée par la distribution de Fermi-Dirac.

41. La conductivité électrique du matériau est donc très faible dans le cas intrinsèque si $E_g \gg k_B T$. Elle est bien meilleure dans les cas p et n où la conduction se fait grâce aux trous et aux électrons respectivement. Si la mobilité est identique pour les deux types de porteurs, alors la conductivité est identique pour les dopages n et p , à concentrations de dopants identiques.
42. Dans le cas d'un matériau ne présentant pas de dopage chimique, on peut néanmoins créer une population d'électrons dans la bande de conduction (ou de trous dans la bande de valence) en apportant des charges par effet électrostatique (on modifie alors le potentiel électro-chimique des électrons). C'est le cas dans le dispositif considéré où le nanotube sert d'électrode dans un condensateur. Sur la figure 5 de l'énoncé, on constate que la conductance G augmente pour les valeurs de V_g très négatives (dopage en trous du nanotube) ou très positives (dopage en électrons). En revanche, la conductivité atteint un minimum proche de $V_g = 0$ V car dans ce cas, la densité de porteurs libres est la plus faible. Ce minimum n'est pas très prononcé sans doute car le gap du nanotube est de l'ordre de $k_B T$. Par ailleurs, on remarque que ce minimum n'est pas exactement centré en $V_g = 0$ V, car il a pu y avoir contamination lors de la fabrication, provoquant un léger dopage chimique.
43. La charge portée par le nanotube est opposée à celle portée par la grille avec laquelle il forme un condensateur de capacité C_g . On a donc $q = -C_g V_g = -C_g (V_g^{\text{DC}} + \tilde{V}_g)$. Deux effets peuvent conduire à une variation de cette charge. Tout d'abord, la partie variable \tilde{V}_g de la tension V_g appliquée au condensateur module la charge portée par

les armatures donc la charge portée par le nanotube. D'autre part, à tension V_g donnée, les mouvements du nanotube dans le plan (xOz) modulent la capacité du condensateur et donc la charge portée par les armatures.

Si on développe au premier ordre en z/h_0 les variations de cette capacité avec le mouvement vertical du nanotube, on trouve :

$$C_g[h(t)] = C_g[h_0 + \tilde{z}(t)] = C_g(h_0) + C'_g \tilde{z}(t)$$

La charge portée par le nanotube se développe donc sous la forme :

$$-q(t) = -(q_0 + \delta q) = C_g(h_0)V_g^{\text{DC}} + C'_g \tilde{z}V_g^{\text{DC}} + C_g(h_0)\tilde{V}_g + C'_g \tilde{z}\tilde{V}_g$$

le dernier terme étant d'ordre 2, il vient :

$$\delta \tilde{q} = -(C_g \tilde{V}_g + C'_g \tilde{z}V_g^{\text{DC}})$$

et finalement

$$\delta \tilde{G} = \frac{dG}{dq} \delta \tilde{q} = -\frac{dG}{dq} (C_g \tilde{V}_g + C'_g \tilde{z}V_g^{\text{DC}})$$

44. On constate donc que la conductance du canal contient un terme variable proportionnel au déplacement du nanotube. Pour mesurer ces variations de conductance et donc détecter électriquement les mouvements du nanotube, on peut par exemple imposer une tension constante entre drain et source. Le courant drain-source comportera donc, en plus d'une composante continue, une partie variable due aux variations $\delta \tilde{G}$ de conductance induites par le mouvement du nanotube. Pour la détection, V_g^{DC} joue donc un rôle démultiplicateur d'une part en permettant une variation conséquente de la charge portée par le nanotube lors de ses déplacements (cf. question 43) et d'autre part en permettant de choisir le régime où les variations de conductance sont maximales lors de petites variations de l'état de charge du nanotube (préfacteur $\frac{dG}{dq}$ illustré sur la figure 5 de l'énoncé).
45. En reprenant le développement de la question 43 et en se limitant à l'ordre 0 (régime statique), on a $q = -C_g V_g$, donc

$$\frac{dG}{dq} = -\frac{1}{C_g} \frac{dG}{dV_g}$$

Lors d'un déplacement du nanotube de l'ordre de $10d_0$, la variation de charge du nanotube qui en découle vaut, d'après la question 43 : $\delta q = -C'_g z^\omega V_g^{\text{DC}}$. Numériquement, on trouve $\delta q = 4 \times 10^{-20}$ C. On en déduit la variation de conductance du canal :

$$\delta G = \frac{dG}{dq} \delta q = -\frac{1}{C_g} \frac{dG}{dV_g} \delta q$$

On voisine de $V_g = 1$ V, on lit sur la figure 5 de l'énoncé $\frac{dG}{dV_g} = 1 \times 10^{-6}$ S·V⁻¹. On en déduit $|\delta G| = 4 \times 10^{-9}$ S. Pour une tension drain-source continue de 100 mV, le courant variable drain-source dû aux vibrations du nanotube vaut alors :

$$I^\omega = |\delta G| V_{ds}^{\text{DC}} = 4 \times 10^{-10} \text{ A} = 0,4 \text{ nA.}$$

46. Pour un condensateur plan on a $C = \epsilon_0 \epsilon_r S / e$ où S représente la surface des contacts et e la distance les séparant. On a ici, pour un diélectrique en silice et d'après les indications de l'énoncé et l'épaisseur déduite de la figure 1 de l'énoncé ($\simeq h_0$) : $C_c = 9 \times 10^{-11}$ F. Comme $C_g \ll C_c$, on pourra négliger le courant électrique passant entre la grille et le nanotube devant ceux passant par les contacts.
47. L'impédance équivalente au condensateur en parallèle avec la résistance est

$$Z_{eq} = \frac{2R_c}{1 + jR_c C_c \omega}$$

On en déduit immédiatement :

$$\tilde{V}_{ds} = \frac{-2R_c \tilde{I}^\omega}{1 + jR_c C_c \omega}$$

On a donc un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2\pi R_c C_c} = 71$ kHz.

48. En reprenant les valeurs de la question 45, la composante alternative de la tension drain-source, dont l'expression a été trouvée à la question 47, vaut : $V_{ds}^\omega = 140$ nV. Une telle tension ne peut être mesurée avec précision que si l'impédance d'entrée de l'appareil de mesure est très grande devant l'impédance de sortie du circuit. Pour une fréquence de 10 MHz très grande devant la fréquence de coupure du filtre passe-bas (question 47), l'impédance équivalente des contacts est de l'ordre de $2/C_c \omega = 350 \Omega$. Une détection synchrone ayant une impédance d'entrée de 1 M Ω convient donc parfaitement.
49. Pour une mesure toutes les millisecondes, c'est-à-dire une bande passante de 1 kHz, le bruit équivalent en entrée de la détection synchrone sera de $15 \times \sqrt{10^3} \simeq 500$ nV qui est nettement supérieur à la tension à mesurer. Il est donc impossible de détecter les oscillations mécaniques du nanotube avec cette approche.
50. Le courant traversant le nanotube est le produit de la conductance et de la tension drain-source.

$$\begin{aligned} I_{ds} = GV_{ds} &= (G^{\text{DC}} + \delta\tilde{G})\tilde{V}_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \\ &= G^{\text{DC}}\tilde{V}_{ds}^{\omega+\Delta\omega} + \frac{dG}{dV_g}(\tilde{V}_g^\omega + \frac{C'_g}{C_g}z^\omega V_g^{\text{DC}})\tilde{V}_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \\ &= G^{\text{DC}}V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos[(\omega + \Delta\omega)t] + \frac{dG}{dV_g}\{V_g^\omega V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos \omega t \cos[(\omega + \Delta\omega)t] \\ &\quad + \frac{C'_g}{C_g}z^\omega \cos(\omega t + \phi)V_g^{\text{DC}}V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos[(\omega + \Delta\omega)t]\} \end{aligned}$$

On utilise la relation

$$\cos a \cos b = [\cos(a + b) + \cos(a - b)]/2$$

pour identifier la fréquence de chacun des termes ci-dessus. Il y a trois composantes spectrales, une à $\omega + \Delta\omega$, une à $2\omega + \Delta\omega$ et enfin celle à $\Delta\omega$. La composante à $\Delta\omega$ s'écrit finalement :

$$I_{ds}^{\Delta\omega} = \frac{1}{2} \frac{dG}{dV_g} \left[V_g^\omega V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos(\Delta\omega t) + \frac{C'_g}{C_g} z^\omega V_g^{\text{DC}} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos(\Delta\omega t - \phi) \right]$$

51. Pour que la tension mesurée ne soit pas atténuée par le filtre passe-bas constitué par les contacts, il faut que $\Delta\omega$ reste faible devant la fréquence de coupure. Il faut donc choisir une fréquence telle que $\Delta\omega/(2\pi) \ll 71 \text{ kHz}$ (cf. question 47). Par exemple, pour $\Delta f = 10 \text{ kHz}$, on trouve $V_{ds} = 20 \mu\text{V} \gg 500 \text{ nV}$. Cette tension est donc nettement supérieure au bruit généré par l'appareil de mesure et la mesure devient possible.

V – Étude de la résonance mécanique

1. Détection de la résonance

52. Même lorsque le déplacement mécanique z^ω du nanotube est nul, le courant comporte une composante non nulle à $\Delta\omega$ qui est due à la modulation de dopage du tube induite par la tension de grille à la fréquence ω . On déduit de la question 50 que :

$$I^{\text{elec}} = \frac{1}{2} \frac{dG}{dV_g} V_g^\omega V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \cos(\Delta\omega t)$$

53. L'application numérique pour l'amplitude donne $I^{\text{elec}} \simeq -50 \text{ pA}$, en prenant $\left. \frac{dG}{dV_g} \right|_{-3\text{V}} \simeq -2 \times 10^{-6} \text{ S}\cdot\text{V}^{-1}$. L'ordre de grandeur obtenu est donc en bon accord avec les données expérimentales présentées sur la figure 8 de l'énoncé ($I^{\text{exp}} \simeq -10 \text{ pA}$). Par ailleurs, le signe du courant mesuré est compatible avec le fait que $\frac{dG}{dV_g} < 0$ pour $V_g^{\text{DC}} = -3 \text{ V}$.
Note : En réalité ce courant est mesuré avec une détection synchrone et il faut multiplier la valeur calculée par 1/2 (cf. question suivante), ce qui rapproche de la valeur expérimentale.

54. On déduit par ailleurs de la question 50 la contribution mécanique :

$$I^{\text{meca}} = \frac{1}{2} \frac{dG}{dV_g} \frac{C'_g}{C_g} z^\omega V_g^{\text{DC}} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega}$$

55. Le signal de sortie de la détection synchrone se calcule grâce aux indications de l'énoncé :

$$\begin{aligned} I_{ds}^{\Delta\omega} &= \frac{1}{2} \frac{dG}{dV_g} V_g^\omega V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\Delta\omega t) \\ &+ \frac{1}{2} V_g^{\text{DC}} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \frac{dG}{dV_g} \frac{C'_g}{C_g} z^\omega \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\Delta\omega t - \phi) \cos(\Delta\omega t) dt \\ &= \frac{1}{4} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \frac{dG}{dV_g} \left[V_g^\omega + \frac{C'_g}{C_g} V_g^{\text{DC}} z^\omega \cos \phi \right] \end{aligned}$$

où on a utilisé $\cos(\Delta\omega t - \phi) \cos(\Delta\omega t) = [\cos \phi + \cos(2\Delta\omega t - \phi)]/2$ et utilisé le fait que l'intégrale sur une période $T = 2\pi/\Delta\omega$ du deuxième terme est nulle.

En remarquant enfin que $z^\omega \cos \phi = \text{Re}(z^\omega)$, on obtient l'expression demandée par l'énoncé :

$$I_{ds}^{\Delta\omega} = \frac{1}{4} \frac{dG}{dV_g} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \left[V_g^\omega + V_g^{\text{DC}} \frac{C'_g}{C_g} \text{Re}(z^\omega) \right] \quad (3)$$

56. À la question 10 de la partie préliminaire, on a vu que $\text{Re}(z)$ a une allure “en dérivée” typique d’une courbe de dispersion. On retrouve bien cette allure ici, traduite verticalement du fait de la contribution purement électrique au signal.

Note : Expérimentalement, on observe en fait une grande variété de profils de résonance. Ceci vient d’un déphasage, variable d’un dispositif à l’autre, entre la partie électrique et la partie mécanique du signal.

57. $\text{Re}(z)$ s’annule à la résonance et donc le signal électrique aussi : on ne peut donc pas l’utiliser pour mesurer z^{ω_0} . À l’aide des indications de l’énoncé, on lit sur la figure 8 : $f_0 = 10,1 \text{ MHz}$ et $f_0/Q = 10,25 - 10 = 0,25 \text{ MHz}$. On en déduit $Q = 40$.

58. D’après l’énoncé, $|\text{Re}(z^{\omega^+})| = z^{\omega_0}/2$, on a donc :

$$|I_{\text{meca}}^{\omega^+}| = \left| \frac{1}{4} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} \frac{dG}{dV_g} \frac{C'_g}{C_g} V_g^{\text{DC}} z^{\omega_0} / 2 \right|$$

or

$$I^{\text{elec}} = \frac{1}{4} V_{ds}^{\omega+\Delta\omega} V_g^{\omega} \frac{dG}{dV_g}$$

on en déduit :

$$z^{\omega_0} = 2 \left| \frac{V_g^{\omega}}{V_g^{\text{DC}}} \frac{C_g}{C'_g} \frac{I_{\text{meca}}^{\omega^+}}{I^{\text{elec}}} \right|$$

59. Numériquement, on trouve $|I_{\text{meca}}^{\omega^+}| = 30 - 10 = 20 \text{ pA}$ (il faut soustraire la contribution purement électrique), d’où : $z^{\omega_0} \simeq 30 \text{ nm}$, c’est-à-dire environ $30 d_0$. Étant donné la longueur du nanotube, on reste largement dans l’approximation des faibles déflexions. De plus, on respecte aussi l’approximation $z^{\omega_0} \ll h_0$ utilisée dans l’analyse de la technique d’excitation/détection électrique des vibrations.

2. Accordabilité du résonateur

60. La tension V_g^{DC} provoque une force électrostatique constante qui peut mettre le nanotube sous tension mécanique. L’apparition d’une tension T_0 dépendant de V_g^{DC} permet de faire varier les fréquences de vibration, comme on l’a vu dans la partie II.

61. Il s’agit d’écrire l’équilibre du point auquel s’applique \vec{F}_{el} . La projection sur l’axe horizontal donne la condition de symétrie de \vec{T} de part et d’autre du point d’application. La projection sur l’axe vertical donne $2T \cos \theta = F_{el}$. Par ailleurs, on a $\sin \theta = W/L$, donc $\cos \theta = \sqrt{1 - (W/L)^2}$. Finalement, en utilisant $\frac{L^2 - W^2}{L^2} = \frac{(W+L)(L-W)}{L^2} \simeq 2u$, on déduit :

$$T_0 = \frac{|F_{el}|}{2\sqrt{2u}} = \frac{|C'_g|(V_g^{\text{DC}})^2}{4\sqrt{2u}}$$

62. En injectant cette expression de la tension mécanique dans l’équation (7) de l’énoncé, on obtient :

$$\omega_0 = \frac{22}{L^2} \sqrt{\frac{BI_y}{\mu}} + 0,28 \frac{|C'_g|(V_g^{\text{DC}})^2}{4\sqrt{2\mu u BI_y}}$$

63. On sort de l'approximation du mode de flexion lorsque la correction en fréquence due à la tension n'est plus négligeable devant la fréquence due à la flexion, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{0,28|C'_g|(V_g^{\text{DC}})^2}{4\sqrt{2\mu u BI_y}} \simeq \frac{22}{L^2} \sqrt{\frac{BI_y}{\mu}}$$

c'est-à-dire :

$$V_g^{\text{DC, flex}} = \frac{18}{L} \sqrt{\frac{BI_y \sqrt{2u}}{|C'_g|}}$$

Numériquement, on obtient : $V_g^{\text{DC, flex}} \simeq 0,5 \text{ V}$, valeur de tension facilement accessible.

64. D'après la question 24, la pulsation du mode fondamental est alors donnée par :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L} |V_g^{\text{DC}}| \sqrt{\frac{|C'_g|}{4\mu\sqrt{2u}}}$$

65. L'allure de $\omega_0(V_g^{\text{DC}})$ est donnée sur la figure 7. On observe un démarrage à pulsation non nulle, une croissance quadratique puis, au delà de $V_g^{\text{DC, flex}}$, une évolution linéaire. De plus, on peut déduire le comportement à tension négative du fait que la fonction est paire.

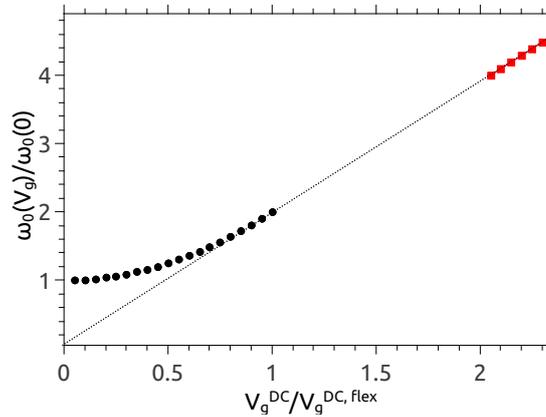


FIGURE 7 – Allure de la fréquence de l'oscillateur en fonction de la tension V_g^{DC} appliquée (noir, approximation de faible tension mécanique, rouge approximation d'un mode de tension pur). La tension est exprimée en unités réduites $V_g^{\text{DC}}/V_g^{\text{DC, flex}}$.

66. On retrouve sur la courbe expérimentale l'ensemble des caractéristiques prévues ci-dessus, avec une tension de transition entre les deux régimes qui est bien de l'ordre d'un peu moins de 1 V. Il y a cependant une légère asymétrie entre les branches $V_g > 0$ et $V_g < 0$ qui n'est pas prévue par la théorie. On note aussi que les asymptotes

linéaires ne se coupent pas à $\omega_0 = 0$ ce qui est dû au fait que l'approximation d'un mode de tension pur au delà de $V_g^{\text{DC, flex}}$ est trop forte. On ne peut pas, en toute rigueur, négliger l'influence de la raideur interne, même si ce terme n'est plus le terme dominant. Enfin, on note que la résonance n'est plus détectable au voisinage de $V_g^{\text{DC}} = 0$ V, ce qui se comprend bien d'après l'expression de la force électrostatique : en l'absence de composante continue à la tension de grille, la force d'excitation à la pulsation ω , proportionnelle à $V_g^{\text{DC}}\tilde{V}_g$, tombe à zéro.

VI – Dissipation : Frottements fluides

67. C'est le facteur de qualité qui est relié à la dissipation : $Q = \omega_0/\gamma$ où γ est directement relié au coefficient de frottements. Plus Q est petit, plus la dissipation est importante. A la question 57, on a évalué $Q = 40$ pour $f_0 = 10$ MHz. On en déduit $\gamma = 1,6 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. L'oscillation s'amortit en environ $1 \mu\text{s}$ c'est-à-dire une dizaine de périodes.
68. Pour que deux molécules entrent en collision, il faut que leurs centres de masse se trouvent à une distance inférieure au diamètre a de ces molécules, ce qui détermine un disque "de sûreté" de rayon a et de section πa^2 autour de chaque molécule. Au cours du déplacement des molécules, c'est la vitesse quadratique relative moyenne qui détermine le déplacement relatif moyen entre deux molécules. Le volume balayé par le disque de sûreté pendant une durée τ est $V = \pi a^2 v_r \tau$. Il reste à écrire que le temps de collision τ_D est défini par le fait que ce volume balayé contient en moyenne une molécule (produisant un choc) ce qui, pour une densité moyenne de particules n , s'écrit : $n\pi a^2 v_r \tau_D = 1$.
69. Considérons deux molécules quelconques de vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Leur vitesse relative est donc $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. On a donc :

$$v_r^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

On prend alors la moyenne d'ensemble en notant que le dernier terme est nul par isotropie des vitesses.

$$\langle v_r^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle$$

Par définition de la vitesse quadratique moyenne, on a : $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = v_0^2$, d'où la relation $v_r = \sqrt{2}v_0$. Le libre parcours moyen étant défini par la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs, on a : $l_D = v_0 \tau_D$ avec $\tau_D = 1/(n\pi a^2 v_r)$ et donc

$$l_D = \frac{v_0}{n\pi a^2 v_0 \sqrt{2}} = \frac{1}{\sigma n}$$

où $\sigma = \pi a^2 \sqrt{2}$ comme indiqué dans l'énoncé.

70. Dans l'approximation du gaz parfait, $P = nk_B T$ et par ailleurs σ ne dépend que de la taille des molécules, donc $l_D = k_B T / (P\sigma)$. l_D augmente proportionnellement à la température -à pression constante- (les molécules vont plus vite) et diminue comme l'inverse de la pression -à température constante- (la densité augmente). À densité constante, l_D ne dépend pas de T . Dans les conditions normales de température et de pression ($P = 10^5$ Pa et $T = 298$ K), on a $n = 2,4 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$.

En estimant la taille d'une molécule de diazote à 3 Å, on a $\sigma \simeq 4 \times 10^{-19} \text{ m}^2$. On trouve alors $l_D \simeq 100 \text{ nm}$. On note que la distance moyenne entre particules est $\langle d \rangle = n^{-1/3} \simeq 3 \text{ nm}$ et donc $l_D \gg \langle d \rangle$.

71. L'hypothèse d'un fluide continu est caduque lorsque $K_n \gg 1$ et les lois usuelles du frottement fluide ne sont plus valides. Ici, on a $K_n = l_D/d_0 \simeq 100$. On est donc largement dans le régime du gaz raréfié. On quittera ce régime si l_D diminue d'un facteur 10, c'est-à-dire si la pression augmente dans les mêmes proportions. Le régime du gaz raréfié est donc valable entre 0 et 10 bars pour le nanotube étudié ici.
72. La distance sur laquelle le tube vibre est beaucoup plus petite que le libre parcours moyen, donc le gaz n'a pas le temps de se thermaliser dans le volume balayé. En termes microscopiques, après collision d'une molécule avec le tube, cette dernière va parcourir une distance $l_D \gg d_0$; la prochaine collision avec le tube aura lieu avec une autre molécule (car $\langle d \rangle \ll l_D$) qui, elle, sera toujours dans la distribution en vitesses initiale du gaz.
73. Dans le référentiel du plan en mouvement, la vitesse de la particule est $\vec{v} - \vec{V}$ et le plan est immobile. Après la collision élastique, le particule a donc une vitesse $-(\vec{v} - \vec{V})$. Ramené dans le référentiel du laboratoire, la vitesse de la particule après le choc s'écrit $-(\vec{v} - \vec{V}) + \vec{V} = 2\vec{V} - \vec{v}$. Le changement d'impulsion de la particule est donc

$$\Delta \vec{p} = m(2\vec{V} - \vec{v} - \vec{v}) = 2m(\vec{V} - \vec{v}) = 2m(v + V)\vec{e}_z$$

la dernière égalité valant seulement pour la configuration représentée sur la figure 11.

74. En utilisant le principe des actions réciproques, on obtient :

$$\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{gaz}} = -\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow \text{plaque}} = \frac{d\vec{p}_{\text{gaz}}}{dt}$$

or $d\vec{p}_{\text{gaz}} = (\text{nombre de chocs pendant } dt) \times \Delta \vec{p}$. On néglige les chocs de la plaque avec les particules se déplaçant suivant $\pm \vec{e}_x$ et $\pm \vec{e}_y$ car $V \ll v_0$. Il y a un tiers des molécules qui se déplacent sur l'axe \vec{e}_z et encore la moitié seulement, soit $n/6$ qui vont dans le sens $-\vec{e}_z$ (les autres n'entrent pas en collision avec la plaque). Le déplacement relatif de la plaque et de ces molécules pendant dt est $(V + v_0)dt$. Donc le nombre de chocs par unité de surface est $nd_0L(V + v_0)dt/6$. On en déduit que

$$\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow \text{plaque}}^{\text{AV}} = -\frac{nm d_0 L}{3}(v_0 + V)^2 \vec{e}_z$$

75. Pour la face arrière, on a un raisonnement similaire. Dans le référentiel de la plaque, les molécules se dirigeant vers la plaque ont une vitesse $\vec{v}_0 - \vec{V}$. Après le choc, cette vitesse devient $-\vec{v}_0 + \vec{V}$. D'où, dans le référentiel du laboratoire, une vitesse après le choc $-\vec{v}_0 + 2\vec{V}$. Finalement, le changement de quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire s'écrit

$$\Delta \vec{p} = m(-\vec{v}_0 + 2\vec{V} - \vec{v}_0) = 2m(V - v_0)\vec{e}_z$$

Le nombre de chocs pendant dt est $nLd_0(v_0 - V)dt/6$. D'où

$$\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow \text{plaque}}^{\text{AR}} = \frac{nm d_0 L}{3}(v_0 - V)^2 \vec{e}_z$$

On en déduit la force totale exercée par le fluide sur le gaz.

$$\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow \text{plaque}}^{\text{tot}} = -\frac{4nmd_0Lv_0V}{3}\vec{e}_z = -\alpha_f\vec{V}$$

avec $\alpha_f = \frac{4}{3}nmd_0Lv_0$. On a bien une force de freinage qui s'oppose au mouvement de la plaque et s'annule si la plaque est immobile. En revanche, contrairement à la loi de Stokes (linéaire en vitesse) où c'est le rayon de l'objet qui intervient dans la force de freinage, c'est ici sa section qui apparaît. À l'inverse, pour le frottement fluide habituel, lorsque c'est la section de l'objet qui intervient, on a une dépendance en vitesse en V^2 .

76. On reprend l'expression de la force avant sur la plaque, pour $V = 0$ et on exprime que cette force correspond à la force de pression du fluide sur la plaque.

$$\vec{F}_p = -PS\vec{e}_z = -Pd_0L\vec{e}_z = -\frac{nmd_0Lv_0^2}{3}\vec{e}_z$$

On en déduit :

$$P = \frac{nmv_0^2}{3} = nk_B T$$

d'après l'équation d'état du gaz parfait ce qui permet de trouver

$$v_0 = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

77. Par suite, on a :

$$\alpha_f = 4Ld_0P\sqrt{\frac{m}{3k_B T}}$$

On en déduit

$$\frac{1}{Q} = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\alpha_f}{\omega_0\mu L} = \frac{4d_0P}{\mu\omega_0}\sqrt{\frac{m}{3k_B T}}$$

avec $\gamma = \alpha_f/(\mu L)$.

78. On constate que l'expérience donne bien une évolution linéaire de $1/Q$ avec la pression comme attendu dans le modèle précédent. Cependant, la droite ne passe pas par l'origine, ce qui signifie que lorsque la pression tend vers 0, il subsiste d'autres mécanismes de dissipation qui ne sont pas pris en compte par ce modèle, c'est-à-dire qui ne sont pas dus à l'interaction du résonateur avec le gaz environnant.

La légende de la figure indique une loi affine avec une pente de $4,3 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. Pour valider l'ordre de grandeur fourni par la théorie, il faut donc comparer ce coefficient à $\frac{4d_0}{\mu\omega_0}\sqrt{\frac{m}{3k_B T}}$. Il faut estimer m la masse d'une molécule de l'air (composé à 80% de diazote et à 20% de dioxygène) de masse molaire moyenne $29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, dont on déduit la masse m : $m = 4,8 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Pour la fréquence de résonance de 10 MHz du résonateur étudié dans ce problème, on trouve alors un coefficient de $7 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. L'ordre de grandeur obtenu est donc satisfaisant.

79. Comme les effets dissipatifs s'ajoutent (en terme de taux de dissipation), c'est donc dans la grandeur $1/Q$ qu'ils apparaissent de façon additive et qu'on peut faire la distinction entre différentes contributions comme ici lorsque $P \rightarrow 0$.

VII – Application : mesure de masses

80. Pour un oscillateur harmonique, on a

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_{\text{eff}}}}$$

donc

$$\delta f_0 = -\frac{f_0}{2} \frac{\delta m}{m_{\text{eff}}}$$

On en déduit la sensibilité en masse grâce à la définition donnée par l'énoncé :

$$\mathcal{R} = \frac{f_0}{2m_{\text{eff}}}$$

Pour l'oscillateur étudié dans la partie V, on trouve $\mathcal{R} = \frac{10^7}{2,7 \times 10^{-21}} \simeq 1,9 \times 10^{27} \text{ Hz} \cdot \text{kg}^{-1}$.

81. En première approximation, on peut supposer que le plus petit changement de fréquence qu'on puisse détecter avec un oscillateur est de l'ordre de f_0/Q . Dans le cas présenté sur la figure 8 de l'énoncé, on obtient environ 250 kHz. La valeur réelle de ce plus petit changement de fréquence détectable dépend bien sûr du niveau de bruit, comme on le verra dans la suite, mais pour un système typique avec un rapport signal/bruit de l'ordre de 5 ou 10, c'est le bon ordre de grandeur. La résolution en masse correspond à ce plus petit changement de fréquence détectable divisé par la sensibilité en masse définie à la question précédente. Pour améliorer la résolution en masse, il y a deux voies possibles : il faut d'une part réduire le plus petit changement de fréquence détectable, c'est-à-dire augmenter le facteur de qualité (et pour cela travailler sous vide et à basse température) et réduire le bruit du système de détection. L'autre voie consiste à augmenter la sensibilité en masse. Pour cela, il faut un résonateur le plus léger possible (d'où le choix des nano-résonateurs) et ayant une fréquence propre la plus élevée possible, c'est-à-dire le plus rigide possible, d'où le choix d'un matériau carboné présentant, comme on l'a vu, un module d'Young exceptionnel.

82. En examinant la courbe de résonance (figure 8 de l'énoncé), on constate que l'amplitude du courant varie d'environ $2I_0$ sur une plage fréquentielle de l'ordre de f_0/Q , soit une pente $\frac{dI}{df} = 2I_0 \frac{Q}{f_0}$. On en déduit qu'un bruit de courant σ_I va entacher la détermination de la fréquence de résonance d'une quantité de l'ordre de $\sigma_I \frac{df}{dI} = \frac{f_0 \sigma_I}{2QI_0}$. On propose donc la relation :

$$\frac{\sigma_I}{2I_0} = Q \frac{\sigma_f}{f_0}$$

Dans le cas de l'oscillateur étudié en partie V, on a $2I_0 = 2 \times 20 \simeq 40 \text{ pA}$, $f_0 = 10 \text{ MHz}$ et $Q = 40$. Numériquement, on a donc $\sigma_f(\text{Hz}) \simeq 6 \times 10^{15} \sigma_I(\text{A})$.

83. S_I s'exprime en $\text{A}/\sqrt{\text{Hz}} = \text{A} \cdot \text{s}^{1/2}$, unité qu'on peut vérifier par analyse dimensionnelle de la formule $S_I = \sqrt{4Gk_B T}$ donnée par l'énoncé. On peut donc déduire l'amplitude des fluctuations thermiques de courant connaissant la bande passante de détection

$$\sigma_I = \sqrt{4Gk_B T \Delta f} = \sqrt{4Gk_B T / \tau}$$

puis, par simple substitution,

$$\sigma_f = \frac{f_0}{QI_0} \sqrt{4Gk_B T / \tau}$$

84. Numériquement, avec $R = 1/G = 50 \text{ k}\Omega$, on trouve à 300 K : $\sigma_I = 5,8 \times 10^{-12} \text{ A}$. Il s'ensuit $\sigma_f \simeq 36 \text{ kHz}$. On en déduit une résolution en masse $\delta m = \sigma_f / \mathcal{R} \simeq 2 \times 10^{-23} \text{ kg}$. La masse d'un atome de carbone est $M_C = 12 \text{ g} / \mathcal{N}_a = 2 \times 10^{-26} \text{ kg}$. La résolution en masse du résonateur de la partie V est donc de l'ordre de 1000 atomes de carbone. À 30 K, on obtient : $\sigma_f \simeq 11 \text{ kHz}$ et une résolution en masse de l'ordre de 310 atomes de carbone. Dans les deux cas, cette résolution est insuffisante pour détecter une molécule individuelle
85. Sur la figure 8 de l'énoncé, on évalue σ_I à 4 pA (2 graduations verticales). En appliquant la formule donnée par l'énoncé, on trouve que le bruit Johnson-Nyquist attendu pour ce dispositif est de l'ordre de 6 pA. On a donc un bon accord avec la valeur expérimentale et c'est donc bien le bruit Johnson-Nyquist qui est la cause principale de bruit de courant dans ce dispositif. Pour le vérifier, on pourrait faire varier la température et vérifier que le bruit évolue comme \sqrt{T} . La réduction de ce bruit avec la température est une raison supplémentaire pour travailler à basse température pour optimiser les performances de ce détecteur de faibles masses. Parmi les autres sources de bruit qu'on aurait pu attendre, on peut citer le bruit de lecture des appareils de mesure, les bruits liés à l'environnement électromagnétique du dispositif ou même le bruit dû aux fluctuations mécaniques du dispositif (mouvement Brownien).
86. Si la longueur est réduite d'un facteur 10, la masse du dispositif l'est de même. Par ailleurs, l'énoncé donne $f_0 = 2 \text{ GHz}$. On en déduit $\mathcal{R} = 4 \times 10^{30} \text{ Hz}\cdot\text{kg}^{-1}$ pour ce nouveau dispositif. La masse d'une molécule de naphthalène est $m_{C_{10}H_8} = 10m_C + 8m_H = 2,1 \times 10^{-25} \text{ kg}$. Le saut de fréquence attendu lors de l'adsorption d'une molécule est donc :
 $\delta f = \mathcal{R}\delta m = 8 \times 10^5 \text{ Hz} = 800 \text{ kHz}$.
 Expérimentalement, on observe des sauts de l'ordre de 500 kHz au maximum (figure 13 de l'énoncé), ce qui est bien l'ordre de grandeur attendu. On remarque qu'on a bien $\Delta f < 0$ car à chaque adsorption d'une molécule, la masse du résonateur augmente et sa fréquence diminue. Par ailleurs, les sauts de fréquence n'ont pas tous la même amplitude : en effet si la molécule s'adsorbe sur un ventre de vibration, l'effet sur l'oscillateur sera beaucoup plus important que si cette adsorption a lieu sur un nœud (à une extrémité par exemple). Bien entendu, ces effets ne peuvent pas être décrits correctement dans le cadre simplifié de l'oscillateur harmonique ponctuel unidimensionnel.