

Composition de physique

La forme de la Terre - proposition de corrigé

I - Vision d'une Terre sphérique

1)

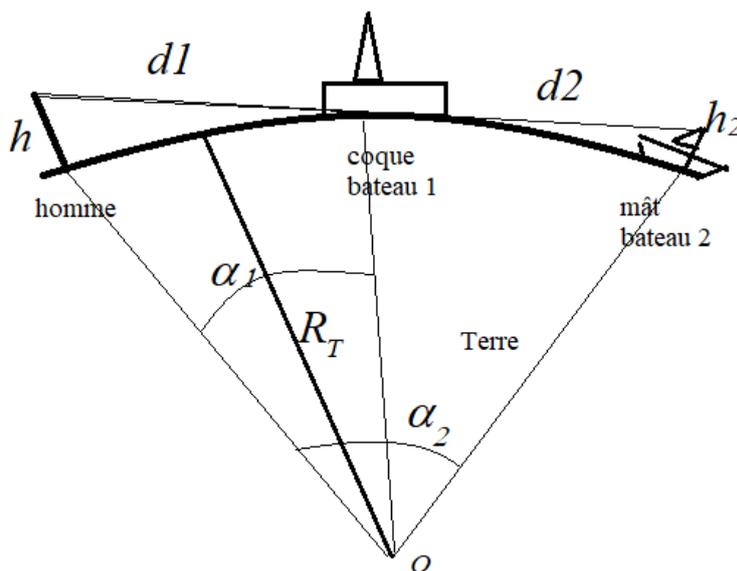
Argument 1 : la forme des éclipses de Lune montre que l'ombre projetée de la Terre est toujours circulaire

Argument 2 : la hauteur des étoiles sur l'horizon varie avec la latitude.

2)

Exemple de résolution :

S'approprier



On note :

- $h \approx 1,7$ m la hauteur de l'oeil de l'homme.

- $R_T \approx 6,4 \times 10^6$ m le rayon de la Terre

- $h_2 \approx 3$ m la hauteur du mât du second bateau.

α_1 (respectivement α_2) les angles depuis O , le centre de la Terre liant l'homme à la coque du premier bateau (respectivement le mat du second bateau).

Analyser :

On va déterminer d_1 par l'angle α_1 puis créer une symétrie pour le second bateau avec l'angle $\alpha_2 - \alpha_1$. On supposera les angles petits.

On suppose que la lumière se propage en ligne droite (homogénéité de température...).

Réaliser :

On retrouve l'angle α_1 dans le triangle avec l'homme et d_1 : $\tan \alpha_1 = \frac{h}{d_1} \approx \alpha_1$. On peut assimiler l'arc de cercle à d_1 : $\alpha_1 \approx \frac{d_1}{R_T}$. Donc $d_1^2 = h R_T \Rightarrow d_1 = \sqrt{1,7 \times 6,4 \times 10^6} \approx 3$ km.

De la même façon, $\alpha_2 - \alpha_1 \approx \frac{d_2 - d_1}{R_T} \approx \frac{h_2}{d_2 - d_1}$ soit $(d_2 - d_1)^2 = h_2 R_T \Rightarrow d_2 = 3000 + \sqrt{3 \times 6400 \times 10^3} \approx 7$ km.

Valider :

d_1 et d_2 sont entre le km et a dizaine de km, ce qui semble en accord avec l'expérience dans la vie de tous les jours.

On vérifie bien que les rapports donnent des angles petits.

3)

$$\alpha = \frac{L}{R_T} \text{ donne } R_T = \frac{L}{\alpha} = \frac{5000 \times 157,5}{(7+12/60) \times \frac{\pi}{180}} = 6267 \text{ km (pas mal comme résultat !)}$$

Le soleil est à distance finie, mais on le considère comme à l'infini. Le soleil est non ponctuel mais on le considère ponctuel pour avoir des rayons tous parallèles.

La précision est certainement moins bonne (5000 stades +/- combien?)

II - Attraction gravitationnelle de la Terre et poids

4)

	électrostatique	gravitation
caractéristiques des particules	charges q_A et q_B	masses m_A et m_B
force entre les deux particules	$\vec{F}_{e_{A \rightarrow B}} = + \frac{q_A q_B}{4\pi \epsilon_0 AB^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}$	$\vec{F}_{g_{A \rightarrow B}} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}$
champ	électrostatique $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{e_{A \rightarrow B}}}{q_B}$	gravitationnel $\vec{A} = \frac{\vec{F}_{g_{A \rightarrow B}}}{m_B} = -\mathcal{G} \frac{m_A}{AB^2} \vec{u}_{A \rightarrow B}$
constante	ϵ_0	$\frac{-1}{4\pi \mathcal{G}}$

5)

Théorème de Gauss en électrostatique : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

Théorème de Gauss analogue pour la gravitation : $\oiint \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = -4\pi M_{\text{int}}$.

Application dans le cas d'une Terre sphérique de centre O , de rayon R_T , de masse volumique homogène μ : étude des symétries $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$ dans un repère sphérique. Si $r < R_T$: $\vec{A} = -G \frac{M_T r}{R_T^3} \vec{u}_r$ et si $r > R_T$: $\vec{A} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$.

II.A - Inhomogénéités du poids à la surface de la Terre

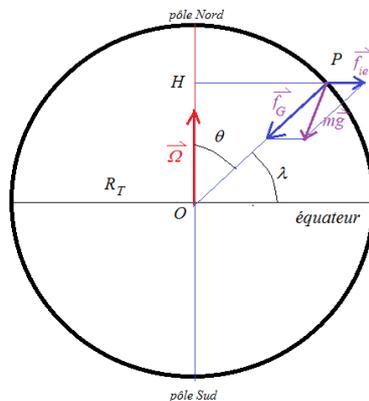
6)

la force d'attraction gravitationnelle : $\vec{F}_G = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}_r$;

la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre : $\vec{f}_{ie} = m \Omega^2 \overrightarrow{HP}$ où H est la projection orthogonale de P sur l'axe de rotation ;

le poids : $m\vec{g} = \vec{F}_G + \vec{f}_{ie} \approx -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}_r$

Schéma :



7)

Champ de pesanteur théorique dans un repère \vec{u}_x (sur l'équateur) et \vec{u}_y (sur l'axe polaire) :

$$\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HP} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} (\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_y) + \Omega R_T \cos \lambda \vec{u}_x$$

donc

$$g = \sqrt{\cos^2 \lambda \left(-\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} + \Omega^2 R_T \right)^2 + \left(\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \sin \lambda \right)^2}$$

La force d'inertie d'entraînement est la plus grande à l'équateur, là où l'on est le plus éloigné de l'axe de rotation. C'est donc à l'équateur que le poids d'un objet est le plus petit, et aux pôle qu'il est le plus grand.

8)

Caractéristiques du modèle du pendule simple : fil inextensible de masse négligeable accroché en un point fixe au bout duquel est fixé une masse ponctuelle.

Détermination de l'équation différentielle suivie par ce pendule simple : PFD, TMC ou TEC

Equation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$.

Condition : petits angles ($\sin \theta \approx \theta$).

Période $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

9)

AN : $g_{\text{théorique}}(\text{Paris}) = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($\lambda = 48,85$) et $g_{\text{théorique}}(\text{Cayenne}) = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($\lambda = 4,93$).

Si le pendule bat la seconde, sa période est $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2 \text{ s}$ soit

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$$

AN : $g_{\text{expérimental}}(\text{Paris}) = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g_{\text{expérimental}}(\text{Cayenne}) = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Conclusion : avec les 3CS, un écart à Paris (altitude?)

III - Vision d'une Terre ellipsoïdale

III.A - Hypothèse de Huygens

10)

Relation fondamentale de l'hydrostatique (Euler ou Navier-Stokes avec $\vec{v} = \vec{0}$) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \mu \vec{g}$$

Soient M et M' infiniment proches ($d\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$), alors

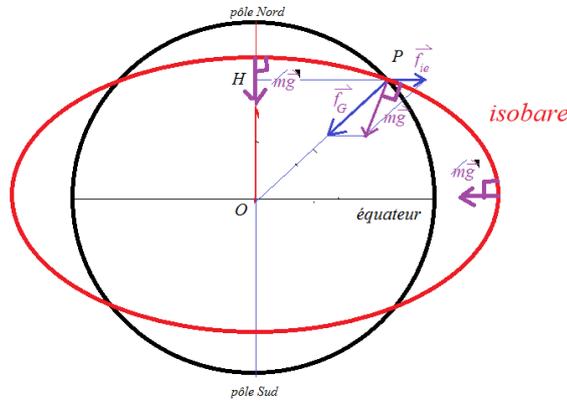
$$P(M') \approx P(M) + dP = P(M) + \overrightarrow{\text{grad}}P \cdot d\vec{\ell}$$

$$P(M') = P(M) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}P \perp d\vec{\ell} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \vec{g}$$

Aussi le champ de pesanteur est-il orthogonal aux isobares (donc la surface libre pour laquelle $P = P_{\text{atm}}$).

11)

Le poids est orthogonal à la surface de la Terre (isobare). On repart donc du schéma déjà fait :



Ainsi, selon Huygens, la Terre est aplatie aux pôles.

III.B - Raisonnement (simplifié) de Newton

12)

Poids d'un élément de colonne équatoriale de hauteur dx , à la distance x du centre O de la Terre :

$$dP_{\text{éq}}(x) = \mu dx S A_{\text{axe-éq}} - \mu dx S \Omega^2 x = \mu dx S \left(\frac{4\pi \mathcal{G} \mu a}{3} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) \frac{x}{a} - \Omega^2 x \right)$$

De même pour un élément de colonne polaire de hauteur dz :

$$dP_{\text{pôle}}(z) = \mu dz S A_{\text{axe-pôles}} = \mu dz S \frac{4\pi \mathcal{G} \mu a}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) \frac{z}{c}$$

Poids de la colonne équatoriale :

$$P_{\text{éq}} = \int_{x=0}^{x=a} dP_{\text{éq}}(x) = \mu S \left(\frac{4\pi \mathcal{G} \mu a}{3} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) \int_{x=0}^{x=a} \frac{x}{a} dx - \Omega^2 \int_{x=0}^{x=a} x dx \right) = \mu S \left(\frac{4\pi \mathcal{G} \mu a^2}{6} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) - \Omega^2 \frac{a^2}{2} \right)$$

Poids de la colonne polaire :

$$P_{\text{pôle}} = \int_{z=0}^{z=c} dP_{\text{pôle}}(z) = \mu S \frac{4\pi \mathcal{G} \mu a}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) \int_{z=0}^{z=c} \frac{z}{c} dz = \mu S \frac{4\pi \mathcal{G} \mu a}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) \frac{c}{2}$$

L'égalité des deux poids impose :

$$\frac{4\pi \mathcal{G} \mu a}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) \frac{c}{2} = \left(\frac{4\pi \mathcal{G} \mu a^2}{6} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) - \Omega^2 \frac{a^2}{2} \right)$$

Comme $c = a(1 - \varepsilon)$,

$$\frac{4\pi \mathcal{G} \mu a^2}{6} \left[\left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right)(1 - \varepsilon) \right] = \Omega^2 \frac{a^2}{2}$$

Soit, au premier ordre du développement :

$$\frac{3\Omega^2}{4\pi\mathcal{G}\mu} = \left[\left(1 - \frac{2\varepsilon}{5}\right) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right)(1 - \varepsilon) \right] \approx \frac{4\varepsilon}{5}$$

donc

$$\varepsilon = \frac{15\Omega^2}{16\pi\mathcal{G}\mu} = \frac{15 \left(\frac{2\pi}{86,2 \times 10^3}\right)^2}{16\pi \times 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{3 \times 5,97 \times 10^{24}}{4\pi \times (6,37 \times 10^6)^3}} = 4,31 \times 10^{-3}$$

III.C - Aplatissement de Laplace

13)

$\varepsilon_{\text{Newton}} = \frac{1}{232}$, un peu plus grand que celui de Laplace, mais du bon ordre de grandeur.
 $a - c = \varepsilon a \approx \varepsilon R_T = \frac{6,37 \times 10^6}{298} = 21,4$ km de la Terre.

IV - Définition du géoïde

Le géoïde est la surface choisie comme référence de l'altitude nulle, qui coïncide avec le niveau moyen des océans (en ignorant les phénomènes de vagues, courants et marées).

IV.A - Couverture du satellite Jason

14)

Système : le satellite (assimilé à un point matériel en M).

référentiel : géocentrique (assimilé à un référentiel galiléen pendant le temps de l'expérience)

Bilan des forces : seule la force d'attraction gravitationnelle, de moment nul par rapport à O , centre de la Terre, fixe dans le référentiel.

Théorème du moment cinétique : le moment cinétique se conserve.

Ainsi, \vec{v} et \vec{OM} à chaque instant sont dans un plan perpendiculaire au moment cinétique, donc dans le même plan que le plan défini par \vec{v} et \vec{OM} à l'instant initial. Donc le plan du mouvement est unique : le mouvement est plan.

Troisième loi de Kepler :

$$\frac{(R_T + h)^3}{T_S^2} = \frac{\mathcal{G} M_T}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{T_S^2 \mathcal{G} M_T}{4\pi^2 (R_T + h)^3} = \frac{6745^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{4 \times \pi^2 \times (6,37 \times 10^6 + 1339 \times 10^3)^3} = 1,00 \approx 1$$

Les valeurs sont donc cohérentes avec la troisième loi de Kepler.

15)

Un cycle de 127 tours dure

$$127 \times T_S = 127 \times 6745 = 85,6 \times 10^4 \text{ s}$$

et

$$10 \times T_T = 10 \times 86,2 \times 10^3 = 86,2 \times 10^4 \text{ s}$$

soit effectivement quasiment 10 jours : le satellite repasse à la verticale du même point.

Lors d'un tour qui dure T_S , la Terre a tourné, à l'équateur, de

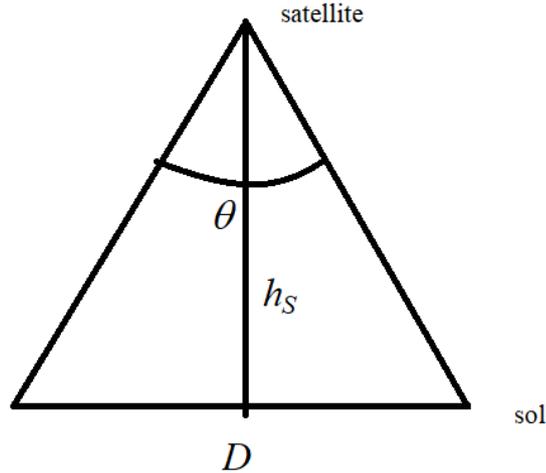
$$2\pi R_T \frac{T_S}{T_T} = 2\pi \times 6,37 \times 10^6 \times \frac{6745}{86,2 \times 10^3} = 3,13 \times 10^3 \text{ km}$$

Dans la mesure où il faut 127 tours du satellite pour revenir à la verticale du même point, les points de passage à la verticale de l'équateur sont éloignés de

$$\frac{2\pi R_T}{127} = \frac{2\pi \times 6,37 \times 10^6}{127} = 315 \text{ km}$$

comme le dit l'énoncé.

IV.B - Principe de l'altimétrie radio



16)

Retard entre l'onde émise et l'onde réfléchie sur la surface de la mer :

$$t = \frac{2h_S}{c} = \frac{2 \times 1339 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 8,92 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Ouverture angulaire due à la diffraction :

$$\theta \approx \frac{\lambda}{d} = \frac{c}{fd} = \frac{3 \times 10^8}{13,6 \times 10^9 \times 1,20} = 18,4 \text{ mrad} = 0,969^\circ \approx 1,28^\circ$$

pas loin (facteur 1,22...)

17)

Le diamètre D de la surface circulaire que l'onde couvre sur le sol est :

$$D = h_S \theta = 1339 \times 10^3 \times \frac{1,28}{180} \times \pi = 2,99 \text{ km}$$

En fait, le signal se propage sur une distance comprise entre $2h_S$ et $2\sqrt{h_S^2 + (\frac{D}{2})^2}$, d'où un élargissement :

$$\delta t_{\text{théorique}} = \frac{2\sqrt{h_S^2 + (\frac{D}{2})^2} - 2h_S}{c} \approx \frac{\frac{D^2}{4h_S}}{c} = \frac{h_S \theta^2}{4c} = 557 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$\delta t_{\text{théorique}} \approx 560 \text{ ns}$$

Sur la figure, l'écho dure $115 - 40 = 75$ échantillons temporels, soit :

$$\delta t_{\text{expérimental}} = 75 \times 3,25 \approx 240 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$\delta t_{\text{expérimental}} \approx 240 \text{ ns}$$

Comparaison : $\delta t_{\text{théorique}} \approx 2 \delta t_{\text{expérimental}}$ (du même ordre de grandeur, peut-être les ondes réfléchies en biais le sont-elles moins...)

18)

Le retard provoqué sur l'écho par un creux de un mètre de profondeur dû à une vague est

$$\frac{2 \times 1}{3 \times 10^8} = 6,67 \text{ ns}$$

qui est de l'ordre de grandeur des fluctuations du signal d'écho observées sur la figure (autour de 2 échantillons de 3,25 ns).

IV.C - Corrections dues à la propagation de l'onde radio dans l'atmosphère

19)

Comme le champ magnétique de l'onde est de norme $\|B\| = \frac{\|E\|}{c}$, la partie magnétique de la force de Lorentz appliquée à un électron est négligeable pour peu que la vitesse de celui soit faible devant c .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron est

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -j \omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E}$$

soit

$$\vec{v}_e = -j \frac{e}{\omega m_e} \vec{E}$$

Comme

$$\vec{j} = \sum_k n_k \cdot q_k \cdot \vec{v}_k = -n_e e \vec{v}_e = \gamma \vec{E}$$

on trouve conductivité du plasma :

$$\underline{\gamma} = j \frac{n_e e^2}{\omega m_e} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

d'où

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

20)

Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Gauss. L'équation de Maxwell Ampère donne pour les champs complexes :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

qui devient d'après la loi d'Ohm :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \underline{k}z - \varphi)} \vec{u}$. En remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\underline{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} + \omega \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega_p^2}{\omega}$$

On trouve la relation de dispersion :

$$\underline{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

qui est la relation de Klein Gordon.

Pour qu'il y ait propagation, il faut que \underline{k} ait une partie réelle non nulle, il ne doit donc pas être imaginaire pur, donc $\omega^2 - \omega_p^2 > 0$.

21)

La vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

car k est réel. Le calcul donne

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

Comme v_φ dépend de ω , le milieu est dispersif.

La vitesse de groupe est :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Le calcul donne

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Comme $v_g < c$, la ionosphère ralentit la propagation du message radio.

22)

La durée que met le signal pour aller du satellite au récepteur est

$$t' = 2 \left(\frac{h_S - \ell}{c} + \frac{\ell}{v_g} \right) = t + \Delta t$$

avec le « délai ionosphérique »

$$\Delta t = 2 \left(\frac{\ell}{v_g} - \frac{\ell}{c} \right)$$

Le « délai ionosphérique » pour une épaisseur ℓ d'ionosphère est

$$\Delta t = \frac{2\ell}{v_g} - \frac{2\ell}{c} = 2\ell \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c} - \frac{1}{c} \right) = \frac{2\ell}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \approx \frac{2\ell}{c} \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\ell \omega_p^2}{c \omega^2}$$

Comme $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$,

$$\Delta t = \frac{e^2}{c \varepsilon_0 m_e \omega^2} n_e \ell$$

qui est bien proportionnel à la quantité d'électrons libres $n_e \ell$ rencontrés sur le chemin.

23)

Sur le graphique, on voit que $n_e < 10^{13} \text{ m}^{-3}$ d'où

$$\omega_p < \sqrt{\frac{10^{13} \times (1,60 \times 10^{-19})^2}{8,85 \times 10^{-12} \times 9,11 \times 10^{-31}}} = 0,178 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On a bien

$$\omega = 2\pi \times 13,6 \times 10^9 = 85,5 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} > \omega_p$$

(la ionosphère est bien transparente pour l'onde envoyée par Jason).

V - Gravimétrie

V.A - Principe d'un gravimètre absolu interférométrique

24)

25)

En F' , l'angle incident est nul. Or $\delta = 2e \cos(i)$ donc en F' :

$$I(e) = 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2e \right) \right)$$

Sa période selon e est $\frac{\lambda}{2}$.

26)

Une rapide étude dynamique du miroir (M_2) donne : $\ddot{\ell}_2(t) = g$; $\dot{\ell}_2(t) = gt$; $\ell_2(t) = \frac{gt^2}{2} + \ell_1$ donc $e(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Ainsi :

$$E(t) = 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} g t^2 \right) \right)$$

$E(t) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} g t^2 \right) = -1 \Leftrightarrow t^2 = \frac{\lambda}{g} \frac{2k+1}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

En traçant la droite, après régression linéaire, de pente $p = 6,51 \times 10^{-8} \text{ s}^2$,

on trouve une valeur de $g = 9,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

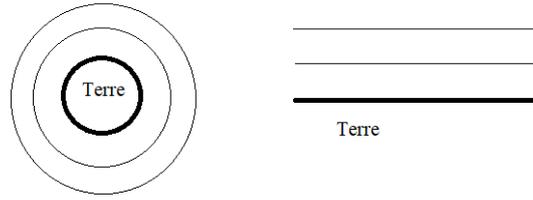
Évaluons les incertitudes... Pour une incertitude de type A, pour 8 mesures, $\Delta g \approx 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Ainsi :

$$g = (9,72 \pm 0,12) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

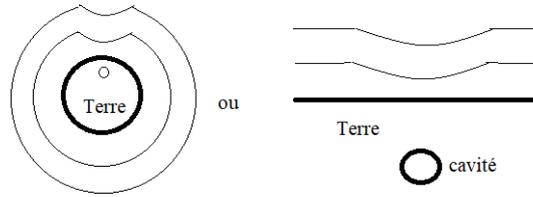
V.B - Anomalies gravimétriques

27)

Allure des surfaces équipotentiels d'une Terre homogène et sphérique :



Forme des surfaces équipotentiels si l'on imagine que quelque part sous la surface de la Terre se situait une petite cavité sphérique (de rayon $R_c \ll R_T$) vide :



28)

Théorème de superposition : on superpose à

$$\left. \begin{array}{l} \rho_h = \rho_0 \text{ si } z < 0 \\ \rho_h = 0 \text{ si } z > 0 \end{array} \right\} \text{ crée } \vec{g}_h$$

une distribution de masse ρ_c qui crée \vec{g}_c :

$$\rho_c(r) = \rho_1 - \rho_0 \text{ si } r < R_c,$$

$$\rho_c(r) = 0 \text{ si } r > R_c$$

dans un repère sphérique centré au centre de la cavité (en $(0, 0, -h_1)$).

$$\left. \begin{array}{l} \rho_c(r) = \rho_1 - \rho_0 \text{ si } r < R_c \\ \rho_c(r) = 0 \text{ si } r > R_c \end{array} \right\} \text{ crée } \vec{g}_c$$

Ainsi, $\vec{\mathcal{A}}(x) = \vec{g}_c(M)$.

Symétries :

- invariances de la distribution de masse : $\rho_c(r)$ dans le repère sphérique centré au centre de la grotte (en $(0, 0, -h_1)$).

- les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont plans de symétrie pour ρ_c .

Comme \vec{g}_c est un vrai vecteur, $\vec{g}_c = g_{c,r}(r) \vec{u}_r$.

En appliquant le théorème de Gauss pour une sphère de centre O et de rayon $r \geq R_c$, on obtient :

$$\oiint \vec{g}_c \cdot d\vec{\Sigma} = g_{c,r}(r) 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} \frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho_c \Rightarrow \vec{g}_c = -\frac{4\mathcal{G}\pi R_c^3 \rho_c}{3r^2} \vec{u}_r$$

Le point M de coordonnées $(x, 0, 0)$ est à une distance du centre de la cavité $r = \sqrt{x^2 + h_1^2}$, et $\vec{u}_r = \frac{x\vec{u}_x + h_1\vec{u}_z}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}$, donc

$$\vec{\mathcal{A}}(x) = -\frac{4\mathcal{G}\pi R_c^3 (\rho_1 - \rho_0)}{3} \frac{x\vec{u}_x + h_1\vec{u}_z}{(x^2 + h_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{A}_z(x) = -\frac{4\mathcal{G}\pi R_c^3 (\rho_1 - \rho_0)}{3} \frac{h_1}{(x^2 + h_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dont la valeur maximale, obtenue à la verticale de la cavité (en $x = 0$) est

$$\mathcal{A}_{\max} = \frac{4\mathcal{G}\pi R_c^3 (\rho_1 - \rho_0)}{3h_1^2}$$

Cherchons x_0 tel que

$$\mathcal{A}_z(x = \pm x_0) = -\frac{\mathcal{A}_{\max}}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_0^2 + h_1^2)^{\frac{3}{2}}}{h_1} = 2h_1^2 \Leftrightarrow x_0^2 + h_1^2 = 2^{\frac{2}{3}} h_1^2 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1} h_1$$

La largeur à mi-hauteur est donc

$$2x_0 = 2\sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1} h_1 = 1,51 h_1$$

29)

Théorème de superposition : on superpose à

$$\left. \begin{array}{l} \rho_h = \rho_0 \text{ si } z < 0 \\ \rho_h = 0 \text{ si } z > 0 \end{array} \right\} \text{ crée } \vec{g}_h$$

une distribution de masse ρ_p qui crée \vec{g}_p :

$$\rho_p(z) = \rho_p \text{ si } 0 < z < h_p,$$

$$\rho_p(z) = 0 \text{ sinon}$$

dans un repère sphérique centré au centre de la cavité (en $(0, 0, -h_1)$).

$$\left. \begin{array}{l} \rho_p(z) = \rho_p \text{ si } 0 < z < h_p \\ \rho_p(z) = 0 \text{ sinon} \end{array} \right\} \text{ crée } \vec{g}_p$$

Etude des symétries :

On se place dans une géométrie cartésienne, \vec{u}_z étant orthogonal au plateau, vers le haut. La distribution de masse est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y . Les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie pour la distribution de masse. Aussi, le champ gravitationnel créé par le plateau est de la forme $\vec{g}_p = g_p(z) \vec{u}_z$.

Comme le plan médian du plateau (yOz) est plan de symétrie pour la distribution de masse, alors le champ gravitationnel est symétrique par rapport à ce plan : $A_z(-z) = -A_z(z)$.

Pour appliquer le théorème de Gauss "gravitationnel", on choisit un cylindre d'axe Oz , de section S , entre les cotes $-h/2$ et $+h/2$:

$$\begin{aligned} \oiint \vec{g}_p \cdot d\vec{\Sigma} &= A_z(h_p/2) S - A_z(-h_p/2) S = 2 A_z(h_p/2) S = -4\pi \mathcal{G} \rho_p S h_p \Rightarrow \\ \vec{g}_p &= -2\pi \mathcal{G} \rho_p h_p \vec{u}_z \end{aligned}$$

Variante 1 : on peut aussi prendre comme surface de Gauss le cylindre qui va de M au plan médian où le champ est nul puisque $A_z(z)$ est impaire.

Variante 2 : on résout l'équation locale (la divergence de \vec{A} est simplement $\frac{dA}{dz}$).

Le champ de pesanteur local est

$$g(M) = g_h(M) + g_p(M) = \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{h_p}{R_T}\right)^{-2} + 2\pi \mathcal{G} \rho_p h_p \approx \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{h_p}{R_T}\right) + 2\pi \mathcal{G} \rho_p h_p$$

aussi

$$g(M) = g_{\text{ref}} - \frac{2\mathcal{G} M_T h}{R_T^3} + 2\pi \mathcal{G} \rho_p h$$

et donc l'anomalie est en valeur absolue

$$\mathcal{A} = 2\pi \mathcal{G} \rho_p h_p - \frac{2\mathcal{G} M_T h_p}{R_T^3}$$

On reconnaît :

- la « correction de plateau » : $2\pi \mathcal{G} \rho_p h_p = g_p$ due à la présence du plateau (et à sa masse)
- et la « correction à l'air libre » : $-\frac{2\mathcal{G} M_T h_p}{R_T^3}$ due à l'éloignement (dans l'air) d'une hauteur h_p par rapport au niveau de référence.

Application numérique :

$$\mathcal{A} = -\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 10^3}{(6,37 \times 10^6)^3} + 2\pi \times 6,67 \times 10^{-11} \times 2,8 \times 10^3 \times 10^3 = -3,1 \times 10^{-3} + 1,17 \times 10^{-3}$$

soit $\mathcal{A} = -1,91 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = -191 \text{ mGal}$ ce qui est donc petit par rapport à g mais tout de même mesurable.

V.C - Principe d'un gravimètre relatif supraconducteur

30)

La force \vec{F} subie par la sphère supraconductrice dérive de l'énergie potentielle avec :

$$-\frac{dE_p}{dz} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} B(z) \frac{dB}{dz} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} N^2 I^2 f(z) f'(z) = +\frac{4\pi R^3}{\mu_0} N^2 I^2 f(z) \alpha(z)$$

On remplace donc avec les expressions de $f(z)$ et $\alpha(z)$:

$$-\frac{dE_p}{dz} = +\frac{4\pi R^3}{\mu_0} N^2 I^2 \frac{3}{8} \frac{\mu_0^2 a^4 z}{(a^2 + z^2)^4} = +\frac{3\pi R^3}{2} \frac{\mu_0 N^2 a^4 z}{(a^2 + z^2)^4} I^2$$

On a donc bien $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dz} \vec{u}_z = \frac{\gamma z}{(a^2 + z^2)^4} I^2 \vec{u}_z$ avec $\boxed{\gamma = \frac{3\pi \mu_0 R^3 N^2 a^4}{2}}$.

31)

On fait une étude mécanique du système sphère supraconductrice dans le référentiel de la bobine supposé galiléen. Le bilan des force est le suivant :

- poids : $-mg \vec{u}_z$,
- force magnétique de la bobine : $\vec{F} = \gamma \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I^2 \vec{u}_z$.

Le théorème de la quantité de mouvement projeté suivant \vec{u}_z donne

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + \gamma \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I^2 = 0$$

à l'équilibre soit

$$I = \sqrt{\frac{mg}{\gamma \frac{z}{(a^2 + z^2)^4}}}$$

comme $\frac{z}{(a^2 + z^2)^4} = \frac{1}{a^7} \frac{x}{(1+x^2)^4}$ avec $x = \frac{z}{a}$ est maximale en $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$, il faut pour l'équilibre que $I_0 > I_M$ avec

$$\boxed{I_M = \sqrt{\frac{\sqrt{7} a^7 m g (1 + \frac{1}{7})^4}{\gamma}}}$$

Sur la figure, il faut chercher pour quels $x = \frac{z}{a}$ on a $\varphi(x) = \left(\frac{I_M}{I_0}\right)^2 f_{max} = \left(\frac{12}{14}\right)^2 \times 0,22 = 0,16$. On trouve $x_1 = 0,16$ et $x_2 = 0,66$ donc $\boxed{z_1 = 0,16 a}$ et $\boxed{z_2 = 0,66 a}$.

Si on est au delà du maximum, toute augmentation de z aura pour effet de diminuer $f(x)$, donc la force magnétique qui devient inférieure au poids. La sphère est alors rappelée vers sa position d'équilibre : $\boxed{\text{l'équilibre est stable pour } z_2}$. Inversement, $\boxed{\text{l'équilibre est instable pour } z_1}$.

32)