

Ondes non linéaires de déplétion et d'élévation

I Ondes à la surface libre d'un liquide

Relation de dispersion des ondes de surface.

- 1) Comme milieu unidimensionnel, on peut penser aux ondes transverses sur une corde tendue, aux ondes acoustiques longitudinales le long de l'axe d'un tube cylindrique (tube de Kundt ou instrument de musique), aux ondes électromagnétiques dans un câble coaxial.

Comme exemple de propagation bidimensionnelle, on peut penser aux ondes dans une membrane de tambour, dans une plaque plane solide (pour la visualisation des figures de Chladni, par exemple), aux ondes de Rayleigh à l'interface entre un solide élastique et le vide ou l'air (ce sont les types d'ondes sismiques les plus dévastatrices), ou aux ondes internes à l'interface entre deux fluides de densité différentes (celles à l'origine des tsunamis, par exemple). On peut aussi penser aux plasmons de surfaces, ondes localisées à l'interface entre un plasma et le vide. Les ondes sonores dans un fluide, les ondes élastiques longitudinales et transverses dans un solide, ou les ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique ou le vide fournissent des exemples de propagation tridimensionnelle. La performance expérimentale récente qu'a été leur détection a conduit certains candidat-e-s à citer les ondes gravitationnelles, qui se propagent dans le vide.

2)

$$c_\phi = \omega(k)/k \quad (1)$$

- 3) Le fluide est décrit en représentation Eulérienne. La variable p représente la pression en Pa et \vec{v} le champ eulérien de vitesse du fluide en m/s.
- 4) Dans l'équation (E-2), ρ est la masse volumique du fluide en kg/m³. Chaque terme de l'équation (E-2) est homogène à une force par unité de volume, et le paramètre μ est la viscosité dynamique du fluide. Son unité est kg m⁻¹ s⁻¹ ou Pa s ou encore Poiseuille.
- 5) Un fluide est Newtonien si le tenseur des contraintes a une relation linéaire en fonction du tenseur des déformations. Le caractère Newtonien du fluide est exprimé, dans l'équation (E-2), par le seul coefficient μ .
- 6) Un écoulement peut être considéré comme incompressible si la vitesse du fluide reste faible devant la vitesse du son dans le fluide. La vitesse au sein du fluide est majorée par la vitesse du fluide en surface, qui peut être estimée à partir de la fig. (E-F7). La déformation de la surface est de l'ordre du millimètre, pour une durée de l'ordre de 0.1 s, soit une vitesse de l'ordre de 10⁻² m/s, qui est totalement négligeable par rapport à la vitesse du son dans le mercure. L'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement est donc une excellente approximation pour les ondes de surface. Remarquons que, dans le cas des ondes de surface, la vitesse du fluide est comparable à la vitesse de propagation des ondes (ce qui est totalement faux en acoustique, par exemple, où la vitesse du fluide est très inférieure à la vitesse du son). La Fig. (E-F6) donne $c_\phi \approx 0,26$ m/s. Dans le régime non linéaire, la Fig. (E-F9) donne $c \approx 1.2\sqrt{gh}$, avec comme plus grande épaisseur de fluide $h = 2,72$ mm, soit $c \approx 0,2$ m/s.
- 7) La quantité homogène à un coefficient de diffusion est la viscosité cinématique $\nu \equiv \mu/\rho$, en m² s⁻¹. La viscosité impose l'annulation de la vitesse tangentielle au fond de la cuve, en $z = -h$.

Si l'on prend h comme longueur typique, on construit l'échelle de temps $\boxed{h^2 \rho / \mu}$. La plus petite valeur de h est 2 mm. Avec les données de l'Annexe A, on trouve pour le temps caractéristique 36 s pour le mercure, et 4 s pour l'eau. Ce temps d'atténuation typique de l'onde est à comparer avec la période d'oscillation, inférieure à 0.2 s d'après la Fig. (E-F6). L'atténuation visqueuse semble donc un phénomène lent, qui peut être négligé dans une première approche. L'équation (E-2) devient donc

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}.} \quad (2)$$

8) L'ordre de grandeur de la vitesse du fluide est donc $\boxed{v \sim \eta_0 / \tau}$. Les ordres de grandeur des deux termes d'accélération sont alors

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \eta_0 / \tau^2, \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \sim v^2 / \lambda \sim \eta_0^2 / (\lambda \tau^2),$$

et le terme non-linéaire est négligeable si

$$\boxed{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \gg |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| \quad \text{soit} \quad \eta_0 / \lambda \ll 1.} \quad (3)$$

9) Dans l'hypothèse d'un écoulement parfait du fluide, un écoulement irrotationnel au départ le reste, donc on peut introduire un potentiel scalaire comme proposé par l'énoncé, Eqn. (E-3). L'équation (E-1) implique alors

$$\boxed{\Delta \Psi = 0.} \quad (4)$$

L'équation (2) s'écrit, après linéarisation,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right).$$

Si l'on introduit un potentiel des vitesses, cette équation s'intègre facilement pour donner

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{P_{atm}}{\rho} + \tilde{\Psi}(t),$$

où $\tilde{\Psi}(t)$ est une fonction quelconque du temps. Mais le potentiel des vitesses est défini à une fonction du temps près, qui peut donc être choisie de telle sorte à annuler cette contribution, donnant l'équation proposée (E-4).

10) Si l'on reporte la forme proposée par l'énoncé (E-5) dans l'équation (4), on trouve que $F(z)$ suit l'équation

$$\boxed{F'' - k^2 F = 0.} \quad (5)$$

11) Dans le modèle du fluide parfait (sans viscosité), au fond la vitesse normale doit être nulle en raison de l'imperméabilité de la paroi, soit

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{e}_z(z = -h) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0.} \quad (6)$$

Cette condition impose $F'(-h) = 0$, ce qui permet d'intégrer (5) pour trouver

$$\boxed{F(z) = F_0 \operatorname{ch}[k(z+h)] = F_0 (\operatorname{ch}kz \operatorname{ch}kh + \operatorname{sh}kz \operatorname{sh}kh),} \quad (7)$$

avec F_0 une constante réelle.

- 12) La condition exacte sur la vitesse en surface est que la vitesse normale d'un point de l'interface doit être égale à celle du fluide (onde de déplacement transversal uniquement), en tenant compte du terme d'advection. On doit donc avoir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \eta = v_z(z = \eta).$$

Bien sûr $\partial\eta/\partial t \sim \eta_0/\tau$ et $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\eta \sim \eta_0^2/(\lambda\tau)$, ce qui fait qu'à l'approximation linéaire $\eta_0 \ll \lambda$ le terme d'advection est négligeable. Par ailleurs, dans la même limite $\eta_0 \ll \lambda$,

$$v_z(z = \eta) = \left. \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right|_{z=\eta} \approx \left. \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

On en déduit donc la formule proposée, Eqn. (E-6).

- 13) On injecte l'expression (E-7) dans l'équation (E-6), sachant par ailleurs la forme de Ψ donnée par (E-5) et (7), d'où

$$-\omega\eta_0 \cos(kx - \omega t) = kF_0 \operatorname{sh}kh \cos(kx - \omega t),$$

soit

$$F(z) = -\frac{\omega}{k \operatorname{sh}(kh)} \eta_0 \operatorname{ch}[k(z+h)] = -\frac{\omega}{k \operatorname{sh}(kh)} \eta_0 (\operatorname{ch}kz \operatorname{ch}kh + \operatorname{sh}kz \operatorname{sh}kh). \quad (8)$$

- 14) Les interactions entre molécules constituant un liquide sont attractives, et une interface entre le liquide et un gaz conduit à une augmentation d'énergie pour les molécules de fluide à l'interface. La tension de surface γ est l'énergie par unité de surface induite par la présence de l'interface liquide/gaz.

Plus précisément, considérons le dispositif schématisé dans la Fig. 1, et calculons le travail infinitésimal δW à fournir pour déplacer de dl la tige mobile. On a

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = 2\gamma L dl = 2\gamma dS \quad (9)$$

où le coefficient 2 vient du fait qu'un film liquide présente deux interfaces liquide/gaz. La tension de surface est donc une énergie par unité de surface, en J m^{-2} mais aussi une force par unité de longueur en N m^{-1} . Si dans le dispositif on bloque la tige mobile, la force exercée par les deux interfaces sur la tige est orientée en sens contraire du schéma, vers l'intérieur du film.

- 15) Cette expression peut être linéarisée si $|\partial\eta/\partial x| \ll 1$.

En ordre de grandeur, $|\partial\eta/\partial x| \sim \eta_0/\lambda$, donc l'équation (E-9) est linéarisée sous la condition précédente $\eta_0 \ll \lambda$, qui correspond à la même condition que la linéarisation de l'équation de Navier-Stokes.

- 16) La pression à l'interface donnée par l'équation de Laplace s'écrit :

$$p(z = \eta^-) = P_{atm} - \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (10)$$

Le champ de pression se déduit alors de l'équation (E-4), ce qui permet d'obtenir,

$$\rho \left. \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + \rho g \eta - \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

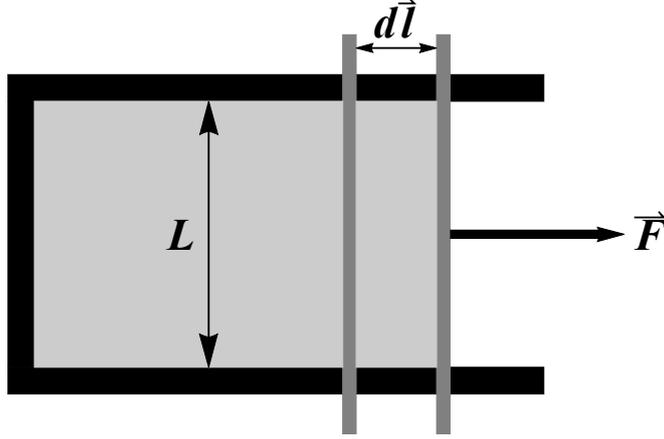


FIGURE 1 – Un film de savon (gris clair) est tendu entre un cadre rigide en U (noir) et une tige mobile (gris foncé) de longueur L sur laquelle il faut exercer une force F pour que le fil soit à l'équilibre mécanique.

Cette équation intermédiaire nécessite une dernière étape dans la linéarisation, pour donner

$$\boxed{\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{z=0} + \rho g \eta - \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.} \quad (11)$$

17) Il suffit d'injecter la forme proposée par l'énoncé pour $\eta(x, t)$, et de déduire de (8)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{\omega^2}{k \operatorname{th} kh} \eta_0 \sin(kx - \omega t),$$

pour obtenir après simplification la relation de dispersion (E-10).

II Vitesse de groupe et propagation de l'énergie

II.1 Notion de vitesse de groupe

18) Les exemples les plus simples sont une distribution rectangulaire, avec $\hat{u}(k)$ constant sur l'intervalle $[k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$ et nul en dehors, ou une distribution gaussienne centrée sur k_0 , $\hat{u}(k) = \exp[-(k - k_0)^2 / (2\delta k^2)] / (\delta k \sqrt{2\pi})$. La Fig. 2 montre ces deux formes possibles pour $|\hat{u}(k)|$ (rectangulaire à gauche, gaussienne à droite) et le signal $u(x, t = 0)$ correspondant. On a $\lambda_0 = 2\pi/k_0$. L'hypothèse $\delta k \ll k_0$ implique $\Delta L \gg \lambda_0$.

19) Un exemple typique est un plasma. À la pulsation de résonance plasma la relation de dispersion est discontinue. On peut aussi penser au pic d'absorption de l'eau dans l'infrarouge.

20) Le point de départ est l'équation (E-13). En utilisant l'hypothèse [H1], on limite le domaine d'intégration à un intervalle fini $[k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$. Sur tout cet intervalle, le développement limité fourni par [H2] devient valable. On arrive alors à

$$u(x, t) = e^{i(k_0 \omega'_0 - \omega_0)t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \delta k}^{k_0 + \delta k} \hat{u}(k) e^{ik(x - \omega'_0 t)} dk.$$

Utiliser à nouveau [H1] permet d'étendre l'intervalle d'intégration à toutes les valeurs de k ,

$$u(x, t) = e^{i(k_0 \omega'_0 - \omega_0)t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ik(x - \omega'_0 t)} dk.$$

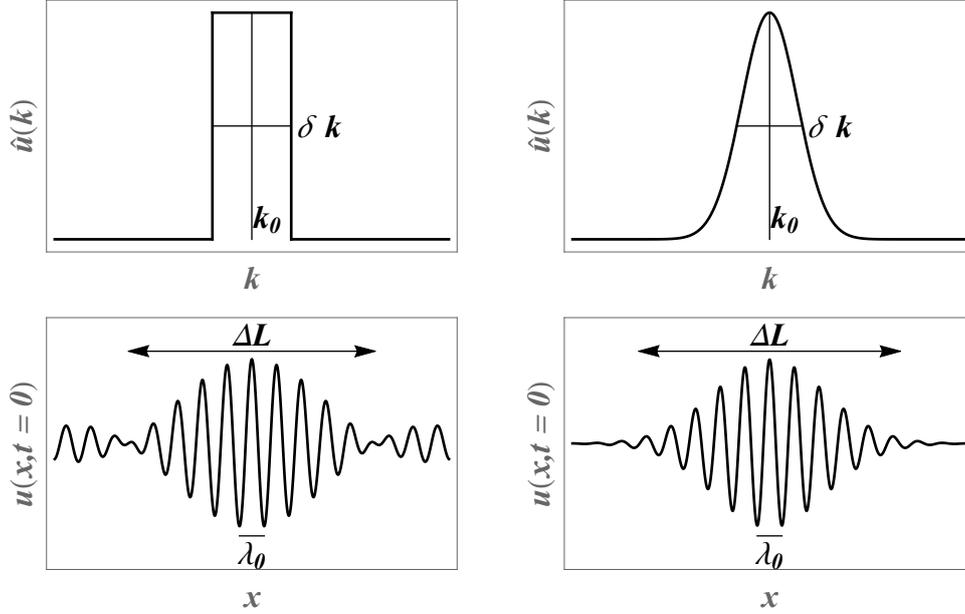


FIGURE 2 – Spectres $|\hat{u}(k)|$ de deux paquets d'ondes et les formes correspondantes $u(x, t = 0)$.

Il suffit de comparer avec l'équation (E-11) de l'énoncé pour voir qu'à un facteur de phase global près,

$$\boxed{u(x, t) = u(x - \omega'_0 t, t = 0)}. \quad (12)$$

En première approximation, le profil d'onde initial $u(x, t = 0)$ se propage donc sans déformation à la vitesse de groupe $\boxed{c_g = \omega'_0}$ qui a bien la dimension physique d'une vitesse.

- 21) La prise en compte du terme suivant permettrait de mettre en évidence le phénomène d'étalement du paquet d'onde, dont la taille caractéristique augmente au fur et à mesure de son déplacement.

II.2 Propagation de l'énergie

- 22) En différenciant la formule (E-16) on obtient

$$2\omega d\omega = \left(g + \frac{3\gamma k^2}{\rho} \right) dk,$$

qui donne le résultat demandé

$$\boxed{c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\omega} \left(g + \frac{3\gamma k^2}{\rho} \right)}. \quad (13)$$

- 23) Le calcul de l'énergie cinétique ne présente aucune difficulté, il suffit d'exprimer la vitesse du fluide,

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \omega \eta_0 \sin(kx - \omega t) e^{kz}, \quad v_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\omega \eta_0 \cos(kx - \omega t) e^{kz}.$$

La tranche de fluide s'étend de $z = -\infty$ à $z = 0$, et

$$e_K = \int \int \frac{\rho}{2} (v_x^2 + v_z^2) dy dz,$$

donc avec l'identité trigonométrique $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$,

$$e_K = \langle e_K \rangle = \frac{\rho}{2} \omega^2 \eta_0^2 L \int_{-\infty}^0 e^{2kz} dz.$$

L'intégrale vaut $1/(2k)$, soit

$$\langle e_K \rangle = \frac{\rho}{4k} \omega^2 \eta_0^2 L. \quad (14)$$

24) La densité linéique d'énergie potentielle de pesanteur est

$$e_P^G = \rho g L \int_0^\eta z dz = \frac{1}{2} \rho g L \eta^2. \quad (15)$$

En moyenne temporelle, il faut tenir compte de $\langle \eta^2 \rangle = \eta_0^2/2$, soit

$$\langle e_P^G \rangle = \frac{\rho}{4} g L \eta_0^2. \quad (16)$$

25) Lorsqu'on passe de l'interface plane $z = 0$ à l'interface déformée $z = \eta(x, t)$, l'épaisseur de la tranche passe de dx à

$$\sqrt{dx^2 + dz^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (17)$$

Cet accroissement d'épaisseur de l'interface conduit à une augmentation de l'énergie interfaciale, soit

$$e_P^C dx = \gamma L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \gamma L dx = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 L dx$$

On en déduit la densité linéique d'énergie potentielle capillaire,

$$e_P^C = \frac{\gamma}{2} L \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2, \quad (18)$$

et sa valeur moyenne temporelle

$$\langle e_P^C \rangle = \frac{\gamma}{4} L k^2 \eta_0^2. \quad (19)$$

26) Le résultat

$$\langle e_K \rangle = \langle e_P^G \rangle + \langle e_P^C \rangle, \quad (20)$$

est immédiatement obtenu si on exprime ω^2/k dans l'équation (14) à partir de la relation de dispersion (E-16), et qu'on compare avec (16) et (19). C'est un résultat classique dans tout système linéaire oscillant lorsqu'on peut négliger la dissipation : en moyenne temporelle, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle. La densité linéique totale d'énergie vaut donc

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\rho}{2k} \omega^2 L \eta_0^2. \quad (21)$$

- 27) Si l'on considère l'expression (E-4), on voit que la pression comporte un terme hydrostatique $P_{atm} - \rho g z$ qui ne doit pas être pris en compte puisqu'il ne participe pas au transport de l'énergie par l'onde. La seule composante des forces de pression à prendre en compte est donc

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (22)$$

On exprime alors la puissance Π_P des forces de pressions dues à l'onde de surface traversant un plan d'abscisse x de la gauche vers la droite, comme

$$\Pi_P = L \int_{-\infty}^0 \delta p v_x dz = -L \int_{-\infty}^0 \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dz \quad (23)$$

En remplaçant Ψ par son expression (E-15), après calcul de l'intégrale suivant z et en effectuant la moyenne temporelle, on trouve

$$\langle \Pi_P \rangle = \frac{\rho \omega^3}{4k^2} L \eta_0^2. \quad (24)$$

- 28) Commençons par préciser les orientations dans le schéma de la Fig. 3. La force capillaire représentée est celle qu'exerce le fluide à gauche de la position x . À l'approximation linéaire la vitesse du point de l'interface est strictement verticale et vaut $(\partial \eta / \partial t) \vec{e}_z$, donc la puissance cherchée est

$$\Pi_C = (+\vec{T}) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \vec{e}_z = -\gamma L \sin \alpha \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

En restant à l'approximation linéaire, l'angle α est petit, de sorte que

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

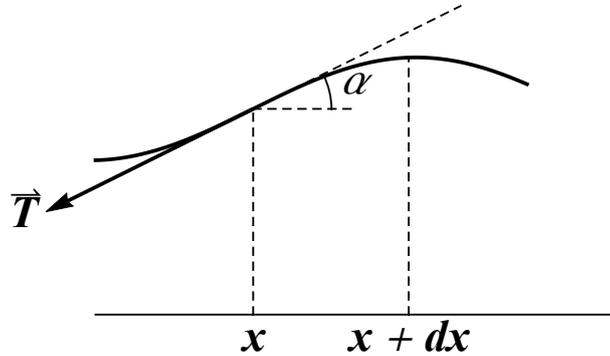


FIGURE 3 – Force de tension superficielle exercée par le fluide à droite de x .

On a donc

$$\Pi_C = -\gamma L \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (25)$$

soit

$$\Pi_C = -\gamma L k \eta_0 \cos(kx - \omega t) [-\omega \eta_0 \cos(kx - \omega t)],$$

ce qui donne en moyenne temporelle

$$\langle \Pi_C \rangle = \frac{\gamma \omega k}{2} L \eta_0^2. \quad (26)$$

- 29) On déduit des questions précédentes la puissance totale transportée par l'onde dans sa direction de propagation,

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\eta_0^2}{4} L \left(\frac{\rho \omega^3}{k^2} + 2\gamma \omega k \right). \quad (27)$$

D'après l'équation (21), la dimension physique de $\langle \mathcal{E} \rangle$ est $M L T^{-2}$, qui est bien homogène à une densité linéique d'énergie. De la même façon, l'équation (27) donne $M L^2 T^{-3}$ pour la dimension physique de $\langle \mathcal{P} \rangle$, qui est donc bien homogène à une puissance. Le rapport $\langle \mathcal{P} \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$ est donc homogène à une vitesse, qu'il est naturel d'identifier avec la vitesse de transport de l'énergie. Un calcul simple donne

$$\frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{\omega^2}{k} + \frac{2\gamma \omega k^2}{\rho} \right) = \frac{1}{2\omega} \left(g + \frac{3\gamma k^2}{\rho} \right) = c_g. \quad (28)$$

On établit donc dans ce cas particulier que, lorsque la vitesse de groupe est définie (c'est-à-dire lorsque les hypothèses précédentes [H1] et [H2] sont valides), alors elle représente la vitesse de propagation de l'énergie.

III Étude expérimentale de la vitesse de phase

III.1 Mesure de l'amplitude des ondes de surface

- 30) Du fait de son caractère métallique, le mercure est un meilleur candidat que l'eau pour les mesures optiques de déflexion de la surface, et pour les mesures avec les capteurs inductifs qui nécessitent un conducteur comme cible. Enfin, du fait de sa forte densité, sa viscosité cinématique est inférieure à celle de l'eau, puisque leurs viscosités dynamiques sont comparables. On peut donc s'attendre à une influence moindre de la viscosité (qui est négligée dans toute l'étude).

Les vapeurs de mercure étant neurotoxiques, il est indispensable de confiner hermétiquement le canal contenant le mercure.

- 31) Les informations sont à glaner dans les textes donnés en annexe, et sont regroupées dans la Figure 4 ci-dessous.

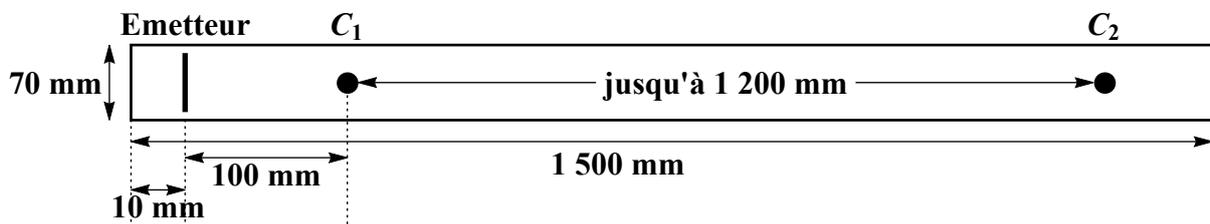


FIGURE 4 – Schéma du dispositif expérimental vu de dessus.

- 32) La mesure optique utilise le fait que la surface libre du mercure est réfléchissante (dans le domaine visible, par réflexion métallique). On utilise un rayon lumineux incident sous l'angle α_0 lorsque le fluide est au repos, il est donc dévié du même angle α_0 . Au passage de l'onde, la surface libre est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et le rayon lumineux est donc

dévié de 2α . Cette mesure n'est sensible qu'à l'inclinaison de la surface libre, une translation ne changeant pas l'angle de réflexion. Le principe du dispositif est schématisé dans la Figure 5 ci-dessous.

La taille du capteur CCD est $8\,192 \times 5\,\mu\text{m}$ soit $\Delta L = 4\text{ cm}$ de long. Si on se réfère à la Figure (E–F7) (b), l'amplitude de l'onde est 0.57 mm , et décroît à 0 en $\Delta t = 0.2\text{ s}$. À la précision cherchée ici, la Fig. (E–F9) montre $c \approx c_s = \sqrt{gh}$, et $h = 5.6\text{ mm}$. La demi-largeur spatiale du profil est donc $c_s \Delta t \approx 50\text{ mm}$, soit une pente $\alpha \approx \tan \alpha = \partial\eta/\partial x \approx 0.01$. La déviation du faisceau lumineux est 2α , et si on veut mesurer des pentes positives et négatives il faut donc couvrir une amplitude angulaire de 4α (le capteur étant orthogonal au rayon lumineux lorsque la surface libre est horizontale). Soit ΔL la taille du capteur, D sa distance de la surface libre, il faut que D soit telle que

$$\boxed{\frac{\Delta L}{D} \sim 4 \times 0.01 \quad \text{soit} \quad D \sim 100\text{ cm}} \quad (29)$$

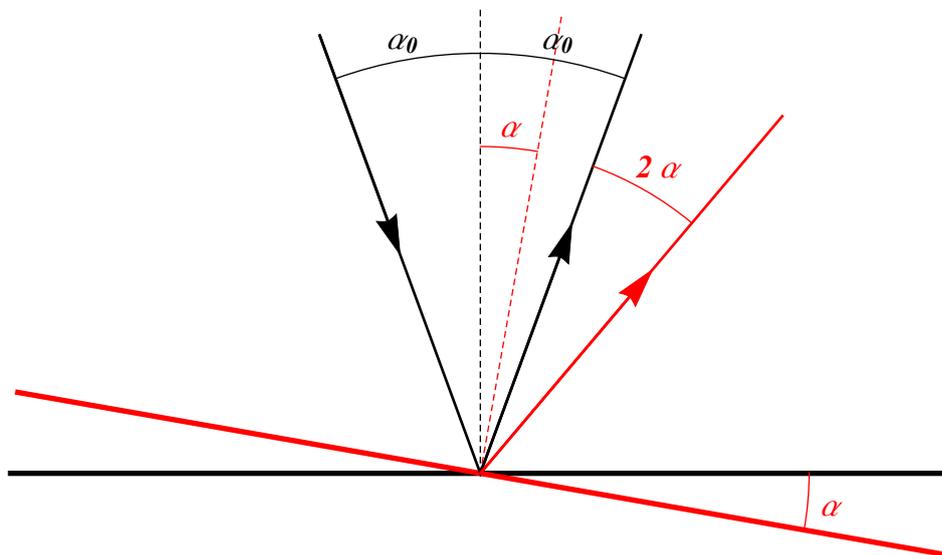


FIGURE 5 – Schéma de principe de la mesure optique. En noir pour la surface libre au repos, en rouge pour la surface libre déviée. Les flèches indiquent le sens de propagation de la lumière.

- 33) En employant un faisceau laser, la résolution est meilleure que le mm (diamètre typique d'un faisceau laser), donc meilleure que celle permise par les capteurs inductifs d'un diamètre de 3 mm.

III.2 Principe d'un capteur inductif

34) $\vec{M} = \pi I a^2 \vec{e}_z$.

35) Une boucle de courant constitue un dipôle magnétique. Les lignes de champ sont représentées dans la fig. 6, présentent une symétrie de révolution autour de Oz , et sont antisymétriques par rapport au plan de la spire.

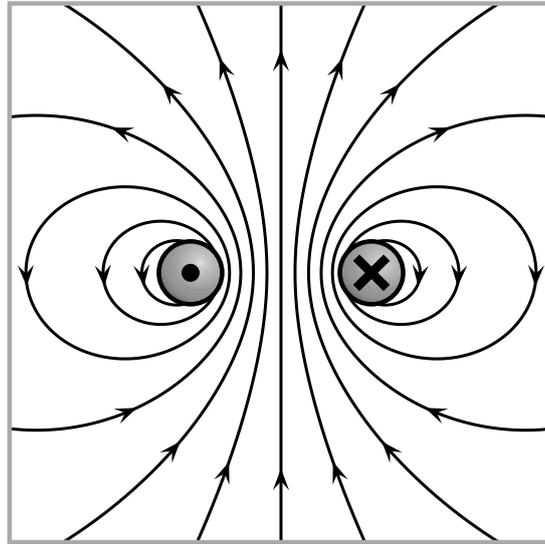


FIGURE 6 – Lignes de champs d'une boucle de courant (dipôle magnétique). Tiré de <https://commons.wikimedia.org>

36) Le champ magnétique engendré par la boucle de courant est colinéaire à l'axe du dipôle et son expression est obtenue avec la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(\Delta d^2 + a^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2\Delta l^3} \vec{e}_z. \quad (30)$$

37) L'épaisseur de peau est la distance sur laquelle pénètre un champ électromagnétique variable dans un conducteur. $\delta = \sqrt{2/(\sigma\mu_0\omega)}$. En prenant une fréquence de 800 kHz et la conductivité du mercure, on trouve $\delta \approx 0.5$ mm, inférieur à a , que l'on assimile au rayon des capteurs inductifs égal à 1.5 mm.

38) Par définition de l'inductance mutuelle M le flux ϕ du champ de la bobine à travers la boucle de courant dans le mercure est MI . En supposant le champ magnétique uniforme sur la boucle de courant induite dans le mercure, on a :

$$\phi = \pi B a^2 = \frac{\pi \mu_0 I a^4}{2\Delta l^3} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{\pi \mu_0 a^4}{2(\Delta d^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (31)$$

L'inductance mutuelle diminue lorsque Δd augmente mais de façon non linéaire.

- 39) La relation n'étant pas linéaire, il faut faire une calibration. Soit Δd_0 la distance entre le capteur et la surface libre du mercure au repos, et notons $\Delta l_0 = \sqrt{\Delta d_0^2 + a^2}$. Si η est la variation de distance induite par l'onde

$$\frac{1}{\Delta l^3} = \frac{1}{[(\Delta d_0 + \eta)^2 + a^2]^{3/2}} = \Delta l_0^{-3} \left(1 + \frac{2\eta\Delta d_0}{\Delta l_0^2}\right)^{-3/2} \approx \Delta l_0^{-3} \left(1 - \frac{3\eta\Delta d_0}{\Delta l_0^2}\right),$$

en supposant $|\eta\Delta d_0/\Delta l_0^2| \ll 1$ (ou de façon quasiment équivalente $|\eta|/\Delta d_0 \ll 1$). Sous cette hypothèse, la variation relative d'inductance mutuelle est $\delta M/M_0 \simeq 3\eta\Delta d_0/\Delta l_0^2$ où $M_0 = \pi\mu_0 a^4/(2\Delta l_0^3)$. En ordre de grandeur, la pulsation de résonance ω_R du circuit RLC , en présence de la cible, est $\omega_R = 1/\sqrt{(L+M)C}$, donc au premier ordre la variation de pulsation sera proportionnelle à δM . Si on ramène la tension de sortie à zéro pour la distance Δd_0 , on a une réponse linéaire.

- 40) Le point crucial est de respecter $|\eta\Delta d_0/\Delta l_0^2| \ll 1$. L'ordre de grandeur de a est le millimètre. Pour les ondes d'élevation, $\Delta d_0 \approx 2.5$ mm, soit en gros la profondeur h de la cellule (voir la Figure 7) et la valeur maximale de η ne dépasse pas $0.3 h$, donc on est à peu près dans les clous. Pour les ondes de déplétion $\Delta d_0 = 0.5$ mm et la valeur maximale η ne dépasse pas $0.05 h$, soit 0.125 mm donc là aussi on est à peu près dans les clous.

III.3 Mesure de vitesse de phase

- 41) Il faut une excitation sinusoïdale.
- 42) Au voisinage d'un émetteur, typiquement pour une distance $d \leq 5\lambda$, le champ comporte une composante propagative appelée champ lointain et une composante non propagative, qui représente une énergie restant toujours proche de l'émetteur, appelée champ proche. La vitesse de phase n'est définie que pour une onde purement propagative. Il n'est donc pas possible de la mesurer en champ proche. Dans la Fig. (E-F6), on voit que la longueur d'onde typique est 2 cm, et ne dépasse pas 6 cm. Dans l'annexe B il est indiqué que le premier capteur est à 10 cm de l'émetteur. La condition de champ lointain est bien respectée pour $\lambda \leq 2$ cm.
- 43) En supposant les capteurs identiques, positionnés de façon identique, le déphasage entre les deux signaux est lié à la propagation de l'onde entre les deux capteurs, sur une distance $X_2 - X_1$ à la vitesse c_ϕ (retard de phase de s_2 par rapport à s_1 donc $\phi > 0$) :

$$s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - k(X_2 - X_1)).$$

Par identification avec $\cos[2\pi ft - \phi(f)]$, la différence de phase est

$$\boxed{\phi(f) = k(X_2 - X_1) = \frac{2\pi f}{c_\phi}(X_2 - X_1).} \quad (32)$$

- 44) D'après sa définition, le signal $s_1(t)$ correspond à la courbe noire (en supposant implicitement une phase définie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$). Le signal $s_2(t)$ est maximal à un instant ultérieur $t_0 = \tilde{\phi}/\omega$. La mesure de t_0 donne celle de $\tilde{\phi}$.
- 45) Les auteurs font des variations de fréquence de 0.1 Hz, ce qui correspond à une variation typique de la phase, en tours, de $0.1 \times 1.2/0.2 \sim 0.6$, où on a pris une vitesse de phase de 0.20 m/s. Or une phase est toujours mesurée à 2π près, donc on voit qu'il faut rajouter 2π (soit un tour)

tous les deux points de mesure au minimum. La variation de fréquence est 20 Hz par pas de 0.1 Hz soit 200 points de mesure, et un tour complet à rajouter à la mesure environ 100 fois. C'est ce qu'on appelle dérouler la phase, pour obtenir une évolution monotone et non en dents de scie, et on voit qu'il n'est pas vraiment possible d'avoir une résolution sur la fréquence moins bonne que 0.1 Hz, ce qui nécessite un générateur de fréquence précis et stable, et justifie l'emploi de la détection synchrone pour minimiser le bruit de mesure.

46) Un tour correspond à une phase de 2π ou 360° . Le nombre de tours N est

$$N = \frac{f(X_2 - X_1)}{c_\phi}. \quad (33)$$

En se reportant à la Fig. (E–F6), on voit qu'à 5 Hz les vitesses de phase sont 0.18, 0.20 et 0.26 m/s, ce qui donne 33, 30 et 23 pour N . À 25 Hz, la vitesse est 0.19 m/s pour chaque cas, soit $N \sim 1,5 \cdot 10^2$.

47) L'écart entre la valeur tabulée et la valeur mesurée dans cette publication scientifique semble très important (17%), et doit être commenté.

La mesure de la tension de surface entre un fluide (ici le mercure) et un gaz (ici l'air) nécessite une interface très propre, ce qui est difficile à l'échelle d'un dispositif aussi grand. La tension de surface mesurée est donc moins élevée qu'attendu, certainement à cause d'impuretés déposées en surface. On a le même genre de problème avec l'eau qui elle aussi a une tension de surface élevée.

48) Sans difficulté

$$c_\phi(\lambda) = \left[\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right) \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda} \right]^{1/2} \quad (34)$$

Avec un stroboscope, on immobilise le système d'onde et on accède directement à la longueur d'onde à la fréquence minimale du stroboscope qui soit synchronisée avec l'émetteur.

IV Couplage entre effets dispersifs et effets non-linéaires.

IV.1 Ondes de surface et équation de Korteweg–de Vries

49) Notons $[.]$ la dimension physique, avec M masse, L longueur et T temps. On a

$$[Bo] = \frac{ML^2T^{-2} \times L^{-2}}{ML^{-3} \times LT^{-2} \times L^2} = 1. \quad (35)$$

On réécrit facilement (E–10) comme

$$\omega = \sqrt{gk} \left[\left(1 + Bok^2h^2 \right) \operatorname{th}(kh) \right]^{1/2}. \quad (36)$$

50) On développe la relation précédente sans difficulté,

$$\omega \approx \sqrt{gk} \left[\left(1 + Bok^2h^2 \right) \left(kh - \frac{k^3h^3}{3} \right) \right]^{1/2} \approx c_s k \left[1 + \left(Bo - \frac{1}{3} \right) k^2h^2 \right]^{1/2},$$

soit enfin

$$\omega = c_s k \left[1 + \frac{1}{6} (3Bo - 1) k^2h^2 \right] + O(k^3h^3). \quad (37)$$

51) En éliminant le terme non-linéaire, on trouve

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + c_s \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{6} c_s h^2 (1 - 3Bo) \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} = 0,} \quad (38)$$

dont la relation de dispersion est bien (37).

52) À partir de (37), on trouve comme vitesse de phase $c_\phi = \omega/k = c_s = \sqrt{gh}$. Dans cette limite, la vitesse de phase est constante (indépendante de k), la propagation est non dispersive et on peut donc parler de vitesse de propagation de l'onde.

Si l'élévation de la surface libre cesse d'être négligeable, on peut proposer comme estimation de la vitesse

$$\boxed{c \sim \sqrt{g(h+A)} \approx c_s \left(1 + \frac{A}{2h}\right),} \quad (39)$$

ce qui constitue une première correction non-linéaire à la vitesse de propagation de l'onde, puisque celle-ci dépend maintenant de l'amplitude de l'onde.

53) L'équation (E-6) donne directement l'ordre de grandeur de la vitesse verticale du fluide en surface :

$$\boxed{v_z \sim \frac{\partial \eta}{\partial t} \sim \omega A.} \quad (40)$$

L'incompressibilité du fluide impose

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim k v_x, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim v_z/h,$$

d'où on déduit

$$\boxed{v_x \sim \frac{v_z}{kh} \sim \frac{\omega A}{k h} \sim c_s \frac{A}{h}.} \quad (41)$$

L'onde se propage localement dans un référentiel animé de la vitesse v_x par rapport au référentiel du laboratoire, donc la vitesse de l'onde observée est

$$\boxed{c \approx c_s \left(1 + \frac{3A}{2h}\right),} \quad (42)$$

54) Si on enlève de l'équation de KdV le terme dispersif, on la réécrit sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + c_s \left(1 + \frac{3A}{2h}\right) \frac{\partial A}{\partial x} = 0,} \quad (43)$$

qui décrit bien une onde non-linéaire se propageant à la vitesse (42).

L'équation de Korteweg-de Vries incorpore donc bien la première correction non-linéaire et la première correction dispersive à la propagation des ondes de grande longueur d'onde.

IV.2 Intermède : un peu de mécanique du point matériel

55) L'équation du mouvement de la particule est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} = \beta x - \frac{\alpha}{2}x^2. \quad (44)$$

56) Les positions d'équilibre de la particule sont les extrema du potentiel, soit $x = 0$ et $x^* = 2\beta/\alpha$. Leur stabilité se déduit de la courbure du potentiel $U''(x) = \alpha x - \beta$. On a $U''(0) = -\beta < 0$, correspondant à un équilibre instable, et $U''(2\beta/\alpha) = \beta > 0$ correspondant à un équilibre stable.

57) L'énergie potentielle $U(x)$ est tracée en fonction de x dans la Figure 7.

On a indiqué $U^* = -2\beta^3/(3\alpha^2)$.

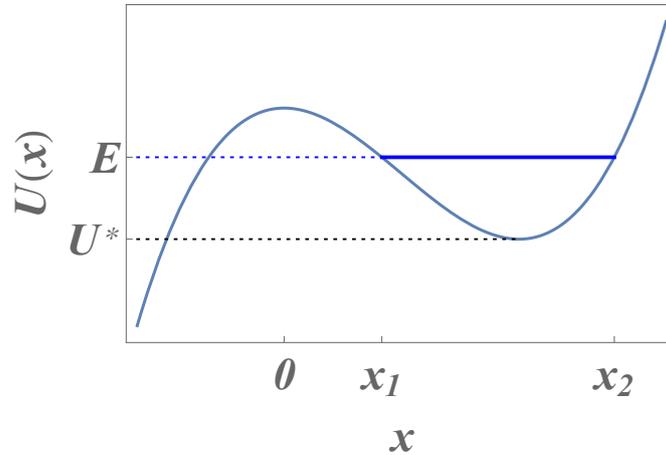


FIGURE 7 – Potentiel $U(x)$ en fonction de x . On a placé sur le dessin l'énergie U^* , ainsi que les positions x_1 et x_2 entre lesquelles la particule oscille lorsque $U^* < E < 0$.

58) La seule force exercée sur la particule dérivant d'un potentiel, l'énergie mécanique E est conservée ce qui donne

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\alpha}{3}x^3 - \beta x^2 = 2E. \quad (45)$$

La résolution graphique est faite dans la Figure 7. Pour une valeur donnée de E telle que $U^* < E < 0$, la différence $E - U(x)$ doit être positive ou nulle ce qui donne x_1 et x_2 comme les deux racines réelles (positives) de $E = U(x)$.

Une période d'oscillation correspond à un aller-retour entre x_1 et x_2 , donc le trajet de x_1 à x_2 donne la demi-période. On déduit de l'équation (45) que $dx/dt = \sqrt{2[E - U(x)]/m}$, ce qui permet d'exprimer la période sous la forme

$$T(E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{m} dx}{\sqrt{2[E - U(x)]}}. \quad (46)$$

59) Lorsque $E \rightarrow U^*$, l'amplitude des oscillations est très faible, on est dans le cadre des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $x^* = 2\beta/\alpha$.

Notons $x = x^* + \epsilon$, avec $|\epsilon|/x^* \ll 1$. L'équation (44) donne alors

$$m\ddot{\epsilon} = -\beta\epsilon,$$

soit l'équation d'un oscillateur harmonique de période $T^* = 2\pi\sqrt{m/\beta}$, qui est donc la valeur de la période $T(\epsilon)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Cette valeur est indépendante de l'amplitude des oscillations tant que celle-ci reste petite, ce qui constitue l'isochronisme des petites oscillations.

60) Lorsque $E = 0$, on a $x_1 = 0$ et $x_2 = 3\beta/\alpha$. La période s'écrit

$$T(E = 0) = 2 \int_0^{3\beta/\alpha} \frac{\sqrt{m} dx}{x\sqrt{\beta - \alpha x/3}}, \quad (47)$$

elle diverge logarithmiquement en $x \rightarrow 0$.

La variation de la période en fonction de l'amplitude des oscillations est représentée dans la Figure 8. Il suffit d'identifier les limites $E \rightarrow U^*$ et $\epsilon \rightarrow 0$ ou $x_2 - x_1 \rightarrow 0$.

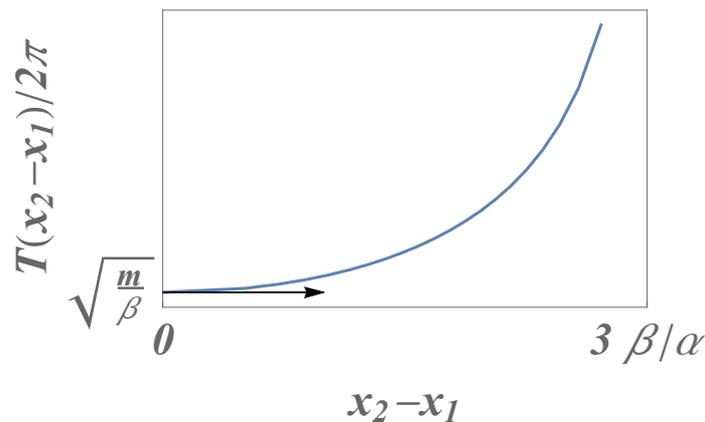


FIGURE 8 – Période des oscillations $T(x_2 - x_1)/(2\pi)$ en fonction de l'amplitude des oscillations $x_2 - x_1$.

- 61) Dans la figure (E-F4), l'énergie E croît de gauche à droite. À gauche, la position évolue sinusoidalement, l'amplitude est donc très faible. Au milieu, le mouvement est périodique mais la position nettement non sinusoidale, donc l'énergie est supérieure à celle de la figure précédente. Enfin à droite on est dans le cas $E = 0$ où le mouvement cesse d'être périodique. Dans ce dernier cas, la position $x(t)$ varie entre 0 (pour $t \rightarrow \pm\infty$) et le maximum $3\beta/\alpha$.
- 62) Le portrait de phase de l'oscillateur est obtenu directement à partir de la conservation de l'énergie mécanique (45). Ainsi on obtient \dot{x} comme une fonction de x paramétrée par l'énergie mécanique E ,

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}. \quad (48)$$

Cette expression permet de tracer la Figure 9. Les trajectoires sont parcourues dans le sens horaire.

Il y a clairement deux topologies différentes pour les trajectoires dans l'espace de phase. Lorsque $U^* \leq E \leq 0$, la trajectoire est une courbe fermée, parcourue pendant le temps T donné par (46). Lorsque $E = U^*$, la courbe fermée se réduit à un seul point, la solution d'équilibre stable et il n'y a aucun mouvement. Lorsque $E = 0$, la trajectoire est parcourue en un temps infini, et il y a une singularité au point $(x = 0, \dot{x} = 0)$. Lorsque $E > 0$, les trajectoires ne sont plus fermées. La trajectoire limite $E = 0$ sépare donc bien l'espace de phase en deux régions qui sont le lieu de mouvements qualitativement différents.

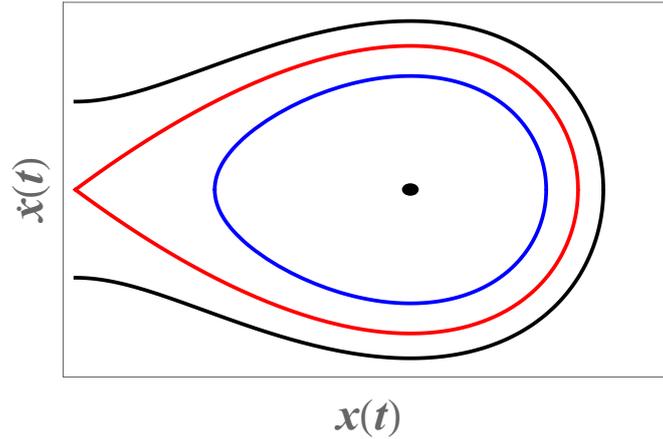


FIGURE 9 – Portrait de phase de l’oscillateur, pour une masse unité. Le point est la position d’équilibre stable, en bleu on a représenté la solution oscillante correspondant à la Figure 7, en rouge la séparatrice correspondant à $E = 0$, et enfin en noir une trajectoire correspondant à $E > 0$, qui s’éloigne donc à l’infini vers les x négatifs.

IV.3 L’onde solitaire de Korteweg–de Vries

63) Le terme dispersif est $\frac{1}{6}c_s h^2(1 - 3Bo)\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}$.

La dispersion a tendance à élargir le profil d’un paquet d’onde. Voir le schéma 10.

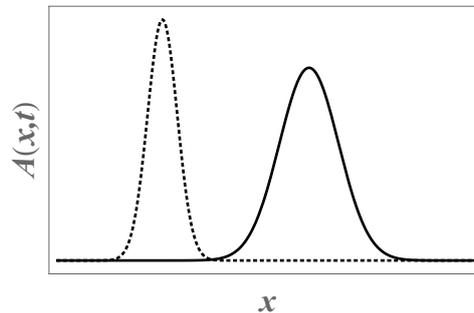


FIGURE 10 – Représentation schématique de l’élargissement d’un paquet d’onde se propageant de la gauche vers la droite, sous l’effet de la dispersion. Le profil de l’onde est dessiné à l’instant initial $t = 0$ en traits pointillés, et à un instant $t > 0$ en traits pleins.

64) La vitesse de l’onde est

$$c = c_s \left(1 + \frac{3A}{2h} \right) \quad (49)$$

Les non linéarités impliquent que la vitesse de l’onde augmente avec son amplitude. Le profil va donc se déformer car son sommet va plus vite que sa base, c’est le principe du déferlement des vagues. Si l’on veut garder une forme fonctionnelle $A(x, t)$ à t fixé, la forme limite présentera une tangente verticale comme dans le schéma 11.

65) Le principe du calcul est d’estimer la variation de vitesse Δc^{NL} due à la nonlinéarité, celle due à la dispersion Δc^{Disp} , et de considérer que ces deux effets antagonistes sont du même ordre de

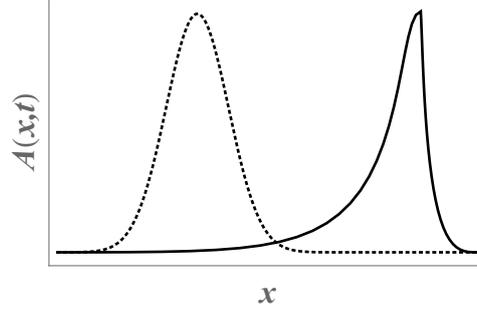


FIGURE 11 – Représentation schématique d’une onde $A(x, t) \geq 0$ se propageant selon l’axe Ox , de la gauche vers la droite, dans un milieu non linéaire tel que la vitesse de propagation croît avec l’amplitude de l’onde. Le profil de l’onde est dessiné à l’instant initial $t = 0$ en traits pointillés, et à un instant $t > 0$ en traits pleins.

grandeur.

Pour le terme non-linéaire l’équation (42) permet d’estimer $\Delta c^{NL} \sim c_s A_0 / h$ (nous ne tenons pas compte des facteurs numériques).

Pour le terme dispersif on peut utiliser l’équation (37), en prenant comme ordre de grandeur $k \sim 1/L$ si L est la largeur typique de l’onde. On estime alors $\Delta c^{Disp} \sim c_s h^2 / L^2$.

Les deux termes seront comparables si

$$\boxed{A_0 \sim \frac{h^3}{L^2}} \quad (50)$$

66) L’équation demandée est

$$\boxed{(c_s - c)A' + \frac{3c_s}{2h}AA' - \frac{c_s h^2}{6}(3Bo - 1)A''' = 0.} \quad (51)$$

67) Cette équation s’intègre effectivement de façon évidente, pour donner

$$(c_s - c)A + \frac{3c_s}{4h}A^2 - \frac{c_s h^2}{6}(3Bo - 1)A'' = Cste$$

Avec les conditions aux limites choisies, pour $\xi \rightarrow \pm\infty$ A et A'' s’annulent, et la constante ne peut être que nulle. On a donc à cette étape

$$\boxed{\frac{c_s h^2}{6}(1 - 3Bo)A'' = (c - c_s)A - \frac{3c_s}{4h}A^2.} \quad (52)$$

68) Il suffit de multiplier chaque membre par A' pour intégrer une seconde fois, et obtenir (E-25) sous la forme

$$\boxed{\frac{c_s h^2}{6}(1 - 3Bo)A'^2 = (c - c_s)A^2 - \frac{1c_s}{2h}A^3 + 2E,} \quad (53)$$

qui donne les identifications

$$\boxed{m \equiv \frac{c_s h^2}{6}(1 - 3Bo) > 0,} \quad \boxed{\beta \equiv c - c_s,} \quad \boxed{\alpha \equiv \frac{3c_s}{2h} > 0,} \quad (54)$$

Puisque $Bo < 1/3$, $m > 0$. Par ailleurs $\alpha > 0$, et on a $\beta > 0$ si $c > c_s$.

TABLE 1 – Détails de l’analogie mécanique.

Particule dans un potentiel	Onde solitaire
position x	élévation A
temps t	variable $\chi = x - ct$
masse m	coefficient $c_s h^2 (1 - 3Bo)/6$
coefficient β	coefficient $c - c_s$
coefficient α	coefficient $3c_s/(2h)$
énergie mécanique E	constante E

69) Si l’on compare l’équation (53) avec (44), l’analogie saute aux yeux et est récapitulée dans la Table 1.

70) Un peu d’algèbre suffit. On calcule d’abord

$$A' = -\frac{3\beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh} \left[\left(\frac{\beta}{m}\right)^{1/2} \frac{\chi}{2} \right]}{\operatorname{ch}^3 \left[\left(\frac{\beta}{m}\right)^{1/2} \frac{\chi}{2} \right]}$$

Pour alléger l’écriture, on n’indique plus les arguments des fonctions hyperboliques. On trouve

$$2E = m \left(\frac{3\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{\beta}{m} \frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^6} - \left(\frac{3\beta}{\alpha}\right)^2 \beta \frac{1}{\operatorname{ch}^4} + \left(\frac{3\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{\alpha}{3} \frac{1}{\operatorname{ch}^6}$$

$$2E = \left(\frac{3\beta}{\alpha}\right)^2 \beta \frac{1}{\operatorname{ch}^4} \left(\frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2} \right) = \left(\frac{3\beta}{\alpha}\right)^2 \beta \frac{1}{\operatorname{ch}^4} \frac{\operatorname{sh}^2 - \operatorname{ch}^2 + 1}{\operatorname{ch}^2} = 0.$$

L’onde solitaire va correspondre, dans l’analogie mécanique, avec l’évolution temporelle d’une particule qui décrit la séparatrice dans l’espace de phase, pour $E = 0$. Cette fonction est représentée dans l’énoncé, c’est la figure de droite de la Figure (E-F4), qui correspond bien à l’image que l’on se fait d’une onde solitaire.

71) On a

$$\boxed{A_0 = \frac{3\beta}{\alpha} > 0,} \quad (55)$$

puisque $\alpha > 0$ et que nous avons supposé $\beta > 0$. En exprimant α et β dans le contexte des ondes solitaires grâce à l’équation (54), on trouve

$$A_0 = \frac{c - c_s}{(c_s/2h)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c = c_s \left(1 + \frac{A_0}{2h}\right).} \quad (56)$$

On vérifie bien que la vitesse de l’onde non linéaire est plus élevée que celle des ondes linéaires : $c > c_s$ si $A_0 > 0$. Par abus de langage, compte tenu de ce que l’équation de KdV apparaît dans d’autres contextes que les ondes de surface, on dit que l’onde solitaire est supersonique .

72) La largeur de l'onde solitaire L est donnée par

$$L \sim \left(\frac{m}{\beta}\right)^{1/2} = \left(\frac{c_s h^2 (1 - 3Bo)}{3c_s A_0 / h}\right)^{1/2} \implies \boxed{L \sim \sqrt{\frac{(1 - 3Bo)h^3}{3A_0}}}. \quad (57)$$

On notera que la loi d'échelle entre L , h et A_0 est bien celle qui correspond à la balance entre effets non-linéaires et effets dispersifs, équation (50).

Il existe donc effectivement parmi les solutions de KdV des ondes solitaires se propageant sans déformation, mais pour une forme fonctionnelle bien particulière, et avec une vitesse qui dépend de leur amplitude.

73) On suppose maintenant $Bo > 1/3$. Si on veut reproduire l'analyse précédente, il est indispensable pour avoir une analogie mécanique que le paramètre équivalent à la masse soit positif. On doit donc changer l'équation (52) en

$$\boxed{\frac{c_s h^2}{6} (3Bo - 1) A'' = (c_s - c) A + \frac{3c_s}{4h} A^2}. \quad (58)$$

Il faut alors, pour retrouver une onde solitaire en forme de profil localisé, que le portrait de phase de l'oscillateur présente la même structure, avec une séparatrice joignant une position d'équilibre instable à elle-même, entourant une position d'équilibre stable, et que la position

d'équilibre instable soit $A = 0$. Si $c_s > c$, on a un potentiel du type $\boxed{U(A) = -\frac{\beta}{2} A^2 - \frac{\alpha}{6} A^3}$,

où $\alpha > 0$ a la même valeur que précédemment et où $\beta = c_s - c$ est positif si l'onde solitaire est subsonique ($c < c_s$). Dans ce cas le potentiel a la bonne forme si $A < 0$ (Voir Figure 12), ce qui signifie qu'on est en train de regarder une déplétion de la surface libre du fluide. La forme de l'onde est alors identique à la précédente, en notant que le signe $A_0 < 0$ avec $1 - 3Bo < 0$ assure la cohérence de l'ensemble, voir Eqn. (57) (onde de déplétion, subsonique, et L réel).

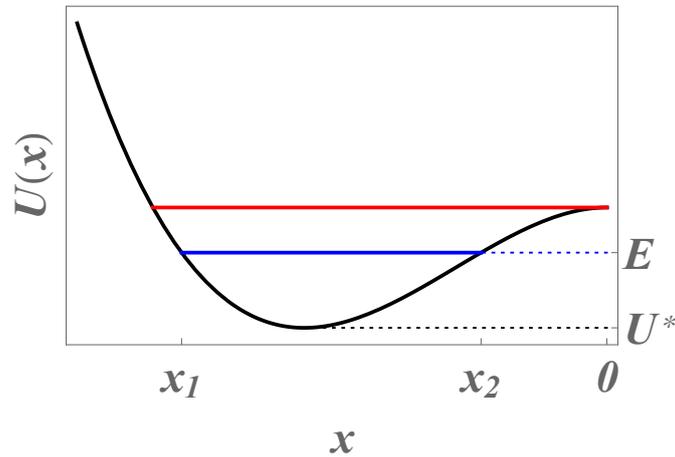


FIGURE 12 – Potentiel $U(A)$ en fonction de A , pour une onde solitaire de déplétion ($A < 0$). On a placé sur le dessin l'énergie U^* , ainsi que les positions x_1 et x_2 entre lesquelles la particule oscille lorsque $U^* < E < 0$. On a aussi placé l'énergie $E = 0$ qui correspond à la séparatrice dans l'analogie mécanique, et à l'onde solitaire de déplétion.

74) Dans le cas $Bo < 1/3$ l'onde solitaire est une onde d'élevation supersonique ($Fr > 1$). Dans le cas $Bo > 1/3$ l'onde solitaire est une onde de déplétion subsonique ($Fr < 1$).

IV.4 Ondes solitaires de déplétion et d'élévation

75) Le nombre de Bond Bo doit être calculé pour chaque valeur de h . Dans le cas de la Fig. (E–F7) (a), $h = 2.12$ mm et $Bo = 0.807$ (avec la valeur tabulée $\gamma = 0.484$ N/m) ou $Bo = 0.667$ (avec la valeur mesurée par les auteurs $\gamma = 0.400$ N/m), donc dans chaque cas $Bo > 1/3$ ce qui est compatible avec l'observation d'ondes solitaires de déplétion. Dans le cas de la Fig. (E–F7) (b), $h = 5.6$ mm et $Bo = 0.12$ (ou $Bo = 0.096$), soit $Bo < 1/3$ ce qui est compatible avec l'observation d'ondes solitaires d'élévation.

76) La forme fonctionnelle (E–26) est totalement déterminée par les paramètres expérimentaux (hauteur h de la couche de fluide, mesurée indépendamment et nombre de Bond Bo , donné par des valeurs tabulées et une mesure indépendante de γ) et par la seule amplitude A_0 maximale de l'onde, qui donne alors sa largeur L . Aucun paramètre libre ne subsiste donc une fois connue la valeur de A_0 , qui impose une et une seule courbe $A(x_0, t)$.

77) Dans le cas de la Fig. (E–F7) (a), $h = 2.12$ mm et $A_0 = -0.064$ mm, donc la formule (56) conduit à $c = 0.142$ m/s. D'après la figure, la durée de l'onde solitaire est $\Delta t = 0.4$ s, donc son extension spatiale est $L = c\Delta t = 5.7$ cm, ce qui est plus petit que la distance de propagation indiquée de 30 cm.

Dans le cas de la Fig. (E–F7) (b), $h = 5.60$ mm et $A_0 = 0.570$ mm, donc $c = 0.246$ m/s. D'après la figure, la durée de l'onde solitaire est aussi $\Delta t = 0.4$ s, donc son extension spatiale est $L = c\Delta t = 9.8$ cm, ce qui est plus petit que la distance de propagation indiquée de 20 cm.

On peut noter que dans les deux cas la distance de propagation n'est pas largement supérieure à l'extension spatiale de l'onde.

78) La distance de propagation (10 cm) de la première onde représentée est du même ordre de grandeur que son extension spatiale, donc on peut imaginer que la forme d'équilibre n'est pas atteinte, car le mouvement imposé au fluide par l'émetteur n'est pas identique à la forme de l'onde solitaire.

L'amplitude devrait être strictement constante si l'analyse faite était exacte. La diminution de l'amplitude ne peut-être due qu'aux effets dissipatifs, non pris en compte jusqu'à présent.

La figure en insert vise à démontrer qu'en dépit de la diminution d'amplitude, la forme fonctionnelle de l'onde solitaire est préservée. L'amplitude est proportionnelle à A_0 , et la largeur L inversement proportionnelle à $|A_0|^{1/2}$ (voir l'équation (57)). Dans une courbe $A(x_0, t)$ montrant une évolution temporelle pour une position x_0 fixée, ce qui est le cas des mesures présentées dans la Fig. (E–F7), l'extension spatiale de l'onde est $ct|A_0|^{1/2}$ (et en pratique, c varie très peu). Dans les variables d'échelles proposées la forme du profil est universelle.

79) Commençons par évaluer pour le mercure la valeur de h correspondant à $Bo = 1/3$. On a $h = \sqrt{\gamma/(\rho g Bo)}$, soit $h = 3.3$ mm (γ tabulé) ou $h = 3.0$ mm (γ mesuré). Les hauteurs de couches de fluides sont donc compatibles avec l'observation d'ondes de déplétion pour $Bo > 1/3$ et d'élévation pour $Bo < 1/3$. On trouve bien que la vitesse des ondes linéaires est $c_s = \sqrt{gh}$, la limite $c/\sqrt{gh} = 1$ séparant ondes de déplétion ($Fr < 1$) et ondes d'élévation ($Fr > 1$). La correction à la vitesse venant de l'amplitude finie (non infinitésimale) de l'onde est bien proportionnelle à A_0/h , et la pente est bien $1/2$ comme prédit par la formule (56).

IV.5 Effets dissipatifs

- 80) La Fig. (E–F8) a mis en évidence l'importance de la dissipation.
- 81) Le fait que les ondes solitaires observées, en dépit d'effets dissipatifs évidents qui se manifestent par la diminution de leur amplitude, soient très bien décrites par une analyse théorique qui néglige ces mêmes effets est un phénomène assez remarquable. Il est lié au fait que les ondes solitaires de l'équation de KdV sont des excitations extrêmement stables. En particulier (mais nous ne l'avons en rien démontré!) on peut montrer que ces ondes solitaires interagissent élastiquement, comme des particules : elles retrouvent leur individualité (forme, vitesse de propagation) après une collision et sont pour cela appelées solitons.
On dit que la forme de l'onde solitaire suit adiabatiquement la diminution d'amplitude causée par la dissipation (adiabatique n'étant ici pas à prendre dans son sens thermodynamique, mais au sens des invariants adiabatiques en Mécanique)
- 82) L'insert de la Fig. (E–F10) montre $\log[A_0(x)/A_0(x=0)]$ en fonction de x . Dans ces variables, les courbes sont à peu près rectilignes. On peut donc définir la longueur d'atténuation $\zeta(h)$ par

$$A_0(x) = A_0(x=0) \exp\left(-\frac{x}{\zeta(h)}\right) \quad (59)$$

Le fait que la longueur d'atténuation dépende de h est établi par le fait que la pente des droites dans l'insert de la Fig. (E–F10) dépend de h .

On la mesure en suivant l'amplitude de l'onde solitaire le long du canal dans lequel elle se propage.

La Fig. (E–F8) permet de répondre à la dernière question. Si on laisse de côté le premier signal (pas très bien décrit par une onde solitaire) on trouve comme amplitude $A(200 \text{ mm}) \approx 3.25 \text{ cm}$ directement mesurée sur la figure (seul le rapport des amplitudes étant utile, il est inutile de convertir) et de même $A(1100 \text{ mm}) \approx 0.30 \text{ cm}$. On en déduit une estimation

$$\zeta(2.12 \text{ mm}) = \frac{900}{\log \frac{A(200 \text{ mm})}{A(1100 \text{ mm})}} \approx 380 \text{ mm}. \quad (60)$$

Par ailleurs $h^{3/2} \approx 3.1 \text{ mm}^{3/2}$. Si on place ce point sur la Fig. (E–F10) tout semble cohérent.

- 83) D'après la Fig. (E–F10), les ondes d'élévation et de déplétion se comportent de manière identique. Le tracé principal de la Fig. (E–F10) indique que $\zeta(h) \propto h^{3/2}$.