

# Quelques aspects de la physique du GPS (Global Positioning System)

*Les différentes parties de ce problème peuvent être abordées pour l'essentiel de manière indépendante. Toutefois, la logique du problème recommande de suivre les parties dans l'ordre pour être en capacité de répondre de façon complète et éclairée à toutes les questions (notamment celles de la dernière partie). Certains résultats intermédiaires sont donnés dans le problème, il est possible de les utiliser pour les questions suivantes, même si on ne les a pas établis.*

*La copie doit être lisible, l'identification de la question traitée doit être évidente. La rédaction est un point essentiel de la correction : les explications peuvent être succinctes du moment qu'elles sont exhaustives et écrites dans un français correct.*

Le « Global Positioning System » ou GPS est un système de positionnement terrestre par satellites. Le premier satellite a été envoyé en 1978. Actuellement, le système comprend 24 satellites opérationnels (Figure 1) orbitant à une altitude d'environ 20 180 km. L'ensemble des satellites constituent le segment spatial. Ces satellites émettent en permanence des signaux sous la forme de paquets d'ondes électromagnétiques sur deux fréquences  $\nu_1$  (1 575 420 000,000 Hz) et  $\nu_2$  (1 227 600 000,000 Hz) pilotées par des horloges atomiques à bord des satellites. Les signaux émis sont reçus et analysés par un récepteur sur la surface de la Terre (le segment utilisateur) comprenant une horloge.

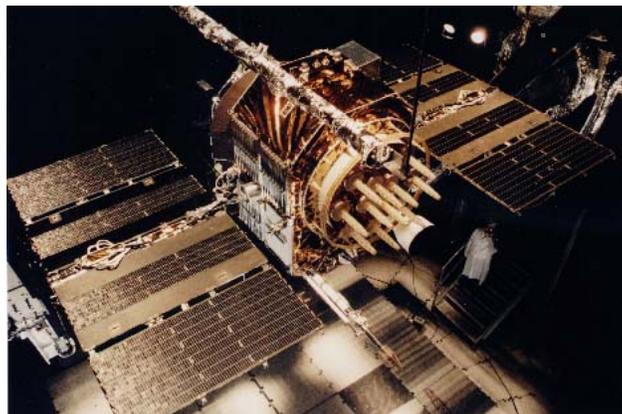


FIGURE 1 – Satellite Navstar

Cinq stations au sol, dont la station maîtresse à Colorado Springs, composent le segment de contrôle. Elles communiquent avec la constellation de satellites pour assurer leur bon fonctionnement et mettre à jour les informations utiles pour les mesures. Ces stations sont

connectées à des horloges atomiques de grande précision au sol afin d'assurer la synchronisation des horloges de la constellation.

Le principe de la mesure est de déterminer la distance  $\ell_{ER}$  entre le satellite émetteur (E) et le récepteur (R) en mesurant le temps de propagation  $\Delta t_{ER} = t_R - t_E$  du signal entre les deux instruments ( $t_R$  étant l'instant de réception et  $t_E$  l'instant d'émission). Dans le cas idéal où satellite et récepteur sont isolés et dans le vide, le temps de propagation est directement proportionnel à la distance :  $\ell_{ER} = c \Delta t_{ER}$  où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide. Si l'on connaît les positions précises de plusieurs satellites émetteurs à l'instant de la mesure, il est possible d'en déduire la position du récepteur.

En pratique, chaque élément du système intervient dans la mesure en introduisant des incertitudes et des perturbations. De plus, l'espace de propagation, c'est-à-dire l'atmosphère, n'est pas le vide et il est nécessaire de modéliser son action sur le signal. La distance  $\ell_{ER}$  ne représente donc plus une distance réelle (géométrique) entre le récepteur et l'émetteur, mais une pseudo-distance comprenant l'ensemble des effets intervenant dans la mesure. Il est notamment nécessaire de prendre en compte :

- l'erreur sur l'orbitographie du satellite et son positionnement
- la contribution de l'ionosphère à la propagation du signal
- la contribution de la troposphère à la propagation du signal
- les effets relativistes
- les décalages des horloges du récepteur et du satellite GPS
- les bruits associés au récepteur et à l'émetteur
- l'amplitude de phénomènes usuellement appelés « effets des trajets multiples » qui ne seront pas détaillés dans ce problème.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques-uns des principaux facteurs intervenant dans la mesure et d'en déduire des contraintes sur le fonctionnement d'un système opérationnel.

Les données numériques du problème sont présentées, quand cela est possible, avec le nombre de chiffres significatifs correspondant à l'état de l'art des connaissances

$R_0$	6 371,0 km	rayon terrestre moyen
$M_0$	$5,9724 \times 10^{24}$ kg	masse terrestre
$\epsilon_0$	$8,854\,187\,817 \times 10^{-12}$ F · m <sup>-1</sup>	permittivité du vide
$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ N · A <sup>-2</sup>	perméabilité magnétique du vide
$\pi$	3,141 592 653 59 ...	
$G$	$6,674\,08 \times 10^{-11}$ m <sup>3</sup> · kg <sup>-1</sup> · s <sup>-2</sup>	constante gravitationnelle
$c$	299 792 458 m · s <sup>-1</sup>	vitesse de la lumière
$m_{\text{at}}$	$1,660\,539\,040 \times 10^{-27}$ kg	unité de masse atomique
$m_{\text{C}}$	132,905 451 96 $m_{\text{at}}$	masse du Césium
$k_{\text{B}}$	$1,380\,648\,52 \times 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	constante de Boltzmann
$e$	$1,602\,176\,6208 \times 10^{-19}$ C	unité de charge
$m_e$	$9,109\,383\,56 \times 10^{-31}$ kg	masse de l'électron
$R$	$8,314\,4598$ J · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	constante des gaz parfaits

On rappelle que pour un vecteur  $\vec{V}$  quelconque

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

## Ordres de grandeurs

Dans cette partie, l'objectif est de calculer quelques caractéristiques et ordres de grandeur du système GPS. On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, ce qui revient à considérer la Terre comme isolée. On suppose de plus qu'elle est sphérique, homogène et sans rotation. L'origine O est située au centre de la Terre. Un satellite de masse  $m$  tourne autour d'elle avec une orbite fermée circulaire à l'altitude  $h_c = 20180$  km.

- Déterminer le module de la vitesse du satellite  $v_c$  dans le référentiel géocentrique en fonction des données du problème. Effectuer l'application numérique.

**Solution:**  $v_c = \sqrt{\frac{GM_0}{h_c + R_0}} = 3874,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- Déterminer et calculer numériquement la période  $T_{\text{orb}}$  de cette orbite.

**Solution:**  $T = \frac{2\pi(h_c + R_0)}{v_c} = 43056 \text{ s}$   
Soit 11 heures 57 minutes et 30 secondes.

- On néglige les effets de l'atmosphère en faisant l'hypothèse que le signal se propage dans le vide. Calculer le temps de propagation  $t_0$  du signal du satellite à un récepteur situé à la surface de la Terre lorsque le satellite passe à la verticale du récepteur.

**Solution:**  $t_0 = \frac{h_e}{c} = 67,313 \text{ ms}$

4. Si l'on souhaite un positionnement à une précision meilleure que le mètre, déterminer la précision nécessaire sur la mesure du temps de propagation. Commenter.

**Solution:**  $\delta t = \frac{1}{c} \approx 3 \text{ ns}$ . Les horloges du système doivent donc être capables d'une précision meilleure que la nanoseconde, il est donc nécessaire d'utiliser des horloges atomiques dans la constellation GPS.

5. Dans le cas idéal où l'on ne prend en compte aucune incertitude, ni aucune perturbation dans le système, où les positions des satellites sont parfaitement connues, déterminer le nombre de satellites nécessaires simultanément pour une mesure de positionnement d'un récepteur situé sur la surface terrestre.

**Solution:** Il faut trois coordonnées pour déterminer la position du récepteur. Il est donc nécessaire d'avoir les mesures de distance avec trois satellites distincts simultanément pour déterminer ces coordonnées.

6. Les horloges des satellites sont synchronisées par le segment de contrôle, mais l'horloge du récepteur peut généralement montrer un décalage par rapport aux horloges des satellites. Même question qu'en (5).

**Solution:** Il suffit d'effectuer la mesure avec 4 satellites (au moins).

## Orbites des satellites

On suppose à présent que l'orbite du satellite est elliptique. On se place toujours dans le référentiel géocentrique et on suppose que la Terre est sphérique, homogène et sans rotation. On appelle  $r$  la distance entre le satellite et le centre de la Terre  $O$ ;  $\vec{r}$  représente ainsi le vecteur position du satellite,  $\vec{v}$  sa vitesse et  $\vec{a}$  son accélération.

Enfin, on suppose toujours que la masse du satellite est négligeable devant celle de la Terre.

7. Montrer, en utilisant les caractéristiques de la force gravitationnelle, que l'orbite du satellite est plane.

**Solution:** Le moment cinétique  $\vec{L}_0$  reste constant car la force gravitationnelle  $\vec{F}$  est une force centrale ;  
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$
  
L'orbite du satellite reste dans le plan perpendiculaire à  $\vec{L}_0$ .

8. On se place désormais dans le plan de l'orbite. Un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est utilisé. On choisit l'origine de l'angle  $\theta$  quand le satellite est au plus proche de

la Terre. On note  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  la base orthonormée associée aux coordonnées polaires. On appelle apogée la position où le satellite est à la distance maximale  $r_{\max}$  de la Terre et périégée la position correspondant à la distance minimale  $r_{\min}$ . Faire un schéma en indiquant les caractéristiques de l'orbite ainsi que le repère.

9. Exprimer les composantes  $a_r$  et  $a_\theta$  de l'accélération dans ce repère.

**Solution:**  $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$   
 $a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$

10. Donner l'expression de la seconde loi de Newton dans ce repère.

**Solution:**  $-\frac{GM_0}{r^2} = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$   
 $0 = \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$

11. On pose  $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ . Retrouver la loi des aires ou deuxième loi de Képler en précisant ce que représente  $C$ .

**Solution:**  $C = r^2 \dot{\theta}$   
 $0 = \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(C)$   
 $C$  est la constante des aires et correspond au double de la vitesse aréolaire.  $C$  est constant, donc  $\vec{r}$  balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

12. On pose :  $u = 1/r$ . Déterminer l'expression de la composante radiale de l'accélération en fonction de  $C$ , de  $u$  et des dérivées de  $u$  par rapport à  $\theta$ .

**Solution:**  $a_r = -C^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$

13. Montrer que l'équation de l'orbite est du type

$$r = \frac{C^2}{K} \frac{1}{1 + e_0 \cos \theta}$$

On exprimera  $K$  en fonction des données du problème.  
 Donner la signification géométrique de  $e_0$ .

**Solution:**  $K = GM_0$   
 $e_0$  est sans dimension, il s'agit de l'excentricité.

14. Donner, en fonction de  $e_0$ ,  $C$ ,  $K$ , le demi grand-axe  $A$  et le demi petit-axe  $B$  correspondant à la solution proposée dans la question précédente. On donnera les unités et les dimensions des quantités explicitées. Nommer la position particulière où se trouve le centre de la Terre.

**Solution:** Le demi grand-axe a la dimension d'une longueur (en mètre)

$$A = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{C^2}{K} \frac{1}{1 - e_0^2}$$

Le demi petit-axe a la dimension d'une longueur (en mètre)

$$B = A\sqrt{1 - e_0^2} = \frac{C^2}{K} \frac{1}{\sqrt{1 - e_0^2}}$$

La Terre est placée à un des foyers de l'ellipse.

15. Vérifier que l'on a la relation

$$v^2 = 2K \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2A} \right)$$

**Solution:** Cette question peut être abordée en utilisant les formules de Binet.

On peut aussi remarquer qu'en écrivant la conservation de l'énergie mécanique au périhélie et à l'apogée, on a ( $\dot{r} = 0$ )

$$\frac{1}{2} \frac{C^2}{r_{\min}^2} - \frac{K}{r_{\min}} = \frac{1}{2} \frac{C^2}{r_{\max}^2} - \frac{K}{r_{\max}} \text{ Par ailleurs on a}$$

$$2A = r_{\min} + r_{\max} \text{ et } C = \text{constante}$$

On obtient alors

$$v^2 = 2K \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2A} \right)$$

16. On donne  $A = R_0 + h_c$  et  $e_0 = 0,01$ . Calculer numériquement la distance  $r_{\max}$  (respectivement  $r_{\min}$ ) du satellite au centre de la Terre lorsqu'il est à l'apogée (respectivement au périhélie). En déduire les valeurs maximale  $v_{\max}$  et minimale  $v_{\min}$  de la vitesse du satellite.

**Solution:**  $r_{\max} = 26817 \text{ km}$

$$r_{\min} = 26286 \text{ km}$$

$$v_{\max} = 3913,4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_{\min} = 3835,9 \text{ m.s}^{-1}$$

# Déplacement de fréquence par effet Doppler classique et relativiste

Le principe de mesure du système porte sur la comparaison des horloges dans le satellite avec une horloge au sol (à la surface de la Terre de rayon  $R_0$ ) que l'on suppose fixe par rapport au référentiel géocentrique. On suppose que les horloges sont identiques et utilisent la même fréquence de référence dans leur référentiel propre. L'objectif de cette partie est d'estimer les effets Doppler classiques et relativistes sur la mesure de la fréquence de l'horloge du satellite dans le référentiel lié au récepteur. On appelle  $\nu$  la fréquence émise par l'horloge du satellite telle qu'elle est captée par le récepteur et  $\nu_0$  la fréquence de référence des horloges.

## Effet Doppler classique

17. Dans le cadre de la composition classique des vitesses, déterminer l'expression classique du décalage en fréquence  $\frac{\Delta\nu_{cl}}{\nu_0} = \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)_{cl}$  par effet Doppler lorsque le satellite a une vitesse  $\vec{v}$  par rapport au référentiel du récepteur. La vitesse  $\vec{v}$  présente un angle  $\phi$  par rapport à la ligne de visée (figure 2).

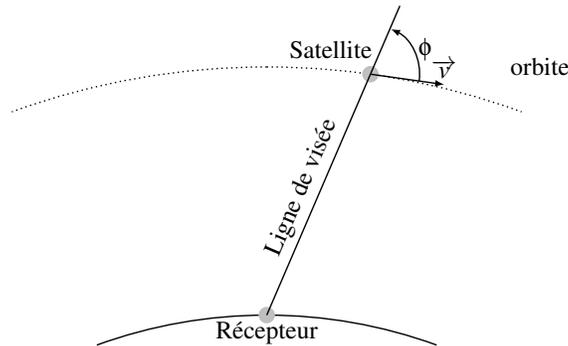


FIGURE 2 – Positions du récepteur et du satellite pour la détermination de l'effet Doppler classique

**Solution:** Si on pose  $\|\vec{v}\| = v$   
 $\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \phi \right)$

18. On fait de nouveau l'hypothèse que le satellite suit une orbite circulaire. On suppose que la Terre est sphérique, sans rotation, et que le récepteur peut capter le signal du satellite dès que celui-ci est plus haut que l'horizon. Enfin, on suppose que la trajectoire du satellite le fait passer à la verticale du récepteur.

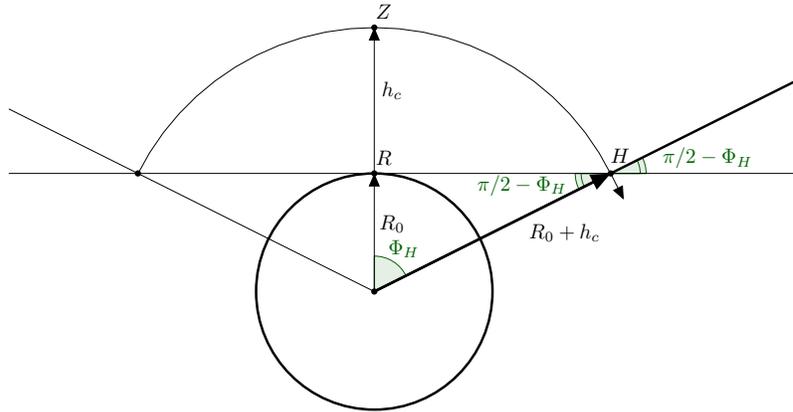
Déterminer comment varie la fréquence du signal émis par le satellite, pendant la traversée du satellite d'un bout à l'autre de l'horizon.

**Solution:** Il s'agit de déterminer l'effet Doppler classique du premier ordre en  $\frac{v}{c}$

$$\nu_{\text{rec}} = \nu_{\text{sat}} \left( 1 \pm \frac{v_c}{c} \cos \phi \right)$$

Comme le récepteur est sur le sol (rayon équatorial : 6371 km) et que les satellites sont à une orbite d'altitude  $h_c$ , l'angle entre le vecteur vitesse du satellite (tangent à l'orbite) et la ligne de visée vaut alors

$$\phi_H = \arccos \frac{R_0}{R_0 + h_c} = 1,3285 \text{ rad}$$



La vitesse du satellite sur son orbite est  $v_c$

L'effet Doppler induit donc une décroissance de la fréquence du signal observé au sol lorsque le satellite passe d'un bout à l'autre de l'horizon. L'amplitude relative maximale de cet effet Doppler (qui est nul lorsque le satellite est au zénith) est donnée par la formule

$$\frac{\Delta \nu_{\text{cl}}}{\nu_0} = \pm \frac{v_c}{c} \cos(\phi_H) = \pm 3,1013 \times 10^{-6}$$

Pour une fréquence  $\nu_1 = 1,57542 \text{ GHz}$ , l'amplitude de l'effet Doppler devient

$$\Delta \nu_{\text{cl}} = \pm 4,8858 \text{ kHz}$$

Dans les faits, l'effet est doublé par tous les effets qui ne sont pas pris en compte dans ce calcul approximatif : rotation de la Terre, vitesse de déplacement du récepteur, écart à la circularité de l'orbite du satellite, etc. On peut donc estimer que

$$\Delta \nu_{\text{cltotal}} \approx \pm 10 \text{ kHz}$$

19. On considère un temps de mesure, caractéristique du choix du récepteur,  $t_{\text{mes}} = 1 \text{ s}$ . On admet que l'erreur induite par l'effet Doppler sur la mesure du temps de propagation s'écrit :  $\delta t_{\text{ER}} = \frac{\Delta \nu_{\text{cl}}}{\nu_0} t_{\text{mes}}$ . Calculer l'erreur en position issue de l'effet Doppler classique. Commenter la pertinence de compenser un tel phénomène et conclure sur les paramètres d'orbite que le récepteur doit connaître pour permettre un positionnement satisfaisant.

**Solution:**  $\delta t_{\text{Doppler}} = 3,0 \times 10^{-6} \text{ s}$

Soit une erreur en distance de 900 m. C'est énorme ! Il est impératif de le compenser par calcul numérique dans le récepteur ce qui impose de connaître la vitesse du

satellite en plus de sa position.

## Relativité restreinte

20. On prend en compte à présent les effets prédits par la relativité restreinte. On suppose que le satellite suit une orbite circulaire qui passe à la verticale du récepteur. On pose  $\tau = \frac{1}{\nu}$  la période du signal du satellite dans le référentiel du récepteur à l'instant où celui-ci passe à la verticale du récepteur. Déterminer  $\tau$  en fonction de la vitesse  $v_c$ , de la période de référence  $\tau_0 = \frac{1}{\nu_0}$  de l'horloge et des données du problème.

**Solution:** Il s'agit du phénomène de dilatation des temps.

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2}}$$

21. Déterminer la variation relative  $\frac{\Delta\nu_{RR}}{\nu_0} = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}\right)_{RR}$  en fréquence par effet Doppler transverse prédite par la relativité restreinte en fonction de la vitesse  $v_c$  et des données du problème. On précisera dans quel sens a lieu la variation en fréquence.

**Solution:** La fréquence de l'horloge du satellite est observée plus faible que celle de l'horloge au sol pour le récepteur.

$$\frac{\Delta\nu_{RR}}{\nu_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2} - 1$$

22. Application numérique : en faisant les mêmes hypothèses que celles de la question (19), déterminer l'erreur induite sur la mesure de distance au satellite pour un temps de mesure d'une seconde si l'on ne prend pas en compte cet effet de dérive.

**Solution:**  $\frac{\Delta\nu_{RR}}{\nu_0} = -8,3513 \times 10^{-11}$

Sur une mesure d'une seconde, l'erreur induite sur le temps est donc un retard de  $\delta t_{RR} = 8,3513 \times 10^{-11}$  seconde. Cela correspond à une erreur en position de  $D_{RR} = c\delta t_{RR} = -2,50$  cm

## Relativité générale

23. On suppose maintenant que le satellite reste fixe par rapport au référentiel galiléen géocentrique tout comme l'horloge réceptrice sur le sol. Les deux horloges sont alors placées à des positions différentes dans le potentiel gravitationnel de la Terre. Le principe d'équivalence prédit que les effets de la gravitation sur les fréquences des horloges sont équivalents à ceux d'horloges accélérées. Le récepteur au sol observe alors un déplacement

de la fréquence  $\nu_{\text{RG}}$  de l'horloge du satellite sous la forme

$$\frac{\Delta\nu_{\text{RG}}}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2U_{\text{sat}}}{c^2}}{1 + \frac{2U_{\text{rec}}}{c^2}}} - 1$$

où  $U_{\text{sat}}$  est le potentiel gravitationnel créé par la Terre à la position du satellite pour l'orbite circulaire et  $U_{\text{rec}}$  le potentiel gravitationnel créé par la Terre au niveau du sol.

Exprimer  $\frac{\Delta\nu_{\text{RG}}}{\nu_0} = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}\right)_{\text{RG}}$  au premier ordre en  $\frac{U}{c^2}$  en fonction des positions des deux horloges et des données du problème. On précisera dans quel sens a lieu la variation en fréquence.

**Solution:** La fréquence de l'horloge du satellite est observée plus grande que celle de l'horloge au sol pour le récepteur.

$$\frac{\Delta\nu_{\text{RG}}}{\nu_0} = \frac{GM_0}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0+h_c} \right)$$

24. Application numérique : en faisant les mêmes hypothèses que celles de la question (19), déterminer l'erreur induite sur la mesure de distance au satellite pour un temps de mesure d'une seconde si l'on ne prend pas en compte cet effet de dérive.

**Solution:**  $\frac{\Delta\nu_{\text{RG}}}{\nu_0} = 5,2905 \times 10^{-10}$

Sur une mesure d'une seconde, l'erreur induite sur le temps est donc un retard de  $\delta t_{\text{RG}} = 5,2905 \times 10^{-10}$  seconde. Cela correspond à une erreur en position de  $D_{\text{RG}} = c\delta t_{\text{RG}} = 15,86$  cm

25. Dans le cas de la constellation GPS, ces deux termes relativistes sont compensés directement en modifiant la fréquence de référence de l'horloge dans le satellite de manière à ce qu'elle apparaisse à la même fréquence que l'horloge au sol pour le récepteur. On suppose que les deux effets relativistes s'additionnent. Calculer les valeurs des deux fréquences  $\nu'_1$  et  $\nu'_2$  émises par le satellite dans son référentiel propre.

**Solution:** Les horloges dans le satellite paraissent avoir une fréquence plus rapide que les horloges au sol pour le récepteur. En conséquence, la fréquence des horloges du satellite doit être diminuée pour compenser l'effet

$$\frac{\Delta\nu_{\text{modif}}}{\nu_0} = -4,4557 \times 10^{-10}$$

Le satellite émet donc deux fréquences

$$\nu'_1 = 1575419999,298 \text{ Hz}$$

$$\nu'_2 = 1227599999,453 \text{ Hz}$$

26. Les effets relativistes sont ainsi compensés directement à bord du satellite. Cependant, pour leur calcul, il a été supposé que le satellite était en orbite circulaire. En reprenant les caractéristiques de l'orbite elliptique données en première partie, déterminer l'erreur

relative en fréquence induite par cette approximation circulaire. Commenter le résultat obtenu.

**Solution:** Le déplacement relativiste total en fréquence s'écrit

$$\frac{\Delta\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = -\frac{v^2}{2c^2} + \frac{GM_0}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} \right)$$

Pour l'apogée, on a  $\frac{\Delta\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = -4,4889 \times 10^{-10}$

Pour le périhélie, on a  $\frac{\Delta\nu_{\text{rel}}}{\nu_0} = -4,4221 \times 10^{-10}$

En ne compensant pas les effets de l'ellipticité, on effectue une erreur de moins de 1%. Cette erreur n'est pas cruciale pour des mesures usuelles de positionnement, mais on doit la calculer pour des mesures de haute précision comme les relevés en géophysique.

# Principe de fonctionnement d'une horloge atomique

La précision requise sur la mesure du temps nécessite l'usage d'horloges atomiques. Dans les satellites du système GPS, quatre horloges atomiques contrôlent les fréquences du signal : deux horloges à Césium et deux horloges à Rubidium. Ces quatre horloges assurent une redondance en cas de dysfonctionnement. Elles sont synchronisées aux horloges du segment de contrôle qui réalise une échelle de temps coordonnée entre des horloges atomiques de référence. Seul le récepteur ne possède pas, dans le cas général, d'horloge atomique, mais un oscillateur, par exemple à quartz, à qui l'on demande juste de conserver une précision en temps suffisante pendant la durée de la mesure (ce qu'il est capable de faire à condition qu'il soit synchronisé avec les horloges du satellite en début de mesure).

Une horloge atomique à Césium ou à Rubidium utilise donc, comme référence en fréquence, un paquet d'atomes dont l'écart entre deux niveaux d'énergie est particulièrement bien connu. Depuis 1967, la seconde a été définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins  $F = 3$  et  $F = 4$  de l'état fondamental  $6S^{1/2}$  de l'atome de césium 133. Cette définition précise ainsi la fréquence  $\nu_0$  de la transition correspondante du Césium. Les horloges atomiques à Césium constituent donc des étalons primaires pour la mesure du temps. Le problème porte sur leur fonctionnement.

On suppose que les atomes de l'horloge sont des systèmes à deux niveaux avec un état fondamental normé  $|f\rangle$  et un état excité normé  $|e\rangle$  correspondant respectivement à des niveaux d'énergie  $E_f$  et  $E_e$  tels que

$$\hbar\omega_0 = E_e - E_f$$

On a alors  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  avec  $\nu_0 = 9\,192\,631\,770$  Hz.

L'état quantique d'un atome, que l'on suppose normé, s'écrit au temps  $t$

$$|\eta(t)\rangle = \gamma_f(t)|f\rangle + \gamma_e(t)|e\rangle$$

On se propose d'étudier l'évolution d'un tel état.

Le Hamiltonien  $H_0$  associé à l'atome libre satisfait aux relations suivantes

$$H_0 |f\rangle = E_f |f\rangle$$

$$H_0 |e\rangle = E_e |e\rangle$$

27. Donner l'équation d'évolution de l'état  $|\eta(t)\rangle$ .

**Solution:**  $H_0 |\eta(t)\rangle = i\hbar \frac{d|\eta(t)\rangle}{dt}$

28. Si l'on suppose qu'au temps  $t = 0$  l'atome est dans l'état initial

$$|\eta(0)\rangle = \gamma_f(0) |f\rangle + \gamma_e(0) |e\rangle$$

déterminer l'expression de l'état de l'atome  $|\eta(t)\rangle$  à un instant  $t$  quelconque en fonction de  $E_f$ ,  $t$ ,  $\hbar$ ,  $\omega_0$ ,  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$ .

**Solution:**  $|\eta(t)\rangle = \exp(-\frac{iE_f t}{\hbar})(\gamma_f(0) |f\rangle + \exp(-i\omega_0 t)\gamma_e(0) |e\rangle)$

Dans une horloge atomique, les atomes sont interrogés par un signal micro-onde issu d'un oscillateur généralement à quartz. En pratique, on suppose qu'au temps  $t = 0$  les atomes sont dans l'état fondamental

$$|\eta(0)\rangle = |f\rangle$$

L'oscillateur envoie un signal sous la forme d'un champ magnétique périodique orienté suivant l'axe  $Oz$  tel que

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \alpha) \vec{u}_z$$

où  $\vec{u}_z$  est un vecteur unitaire de l'axe  $Oz$  et  $\omega = 2\pi\nu$  est la pulsation (et  $\nu$  la fréquence) du signal de l'oscillateur que l'on choisit proche de la fréquence de référence.

L'objectif de la mesure est de déterminer la probabilité de transition de l'atome vers l'état excité  $|e\rangle$  à l'issue de l'interaction avec ce champ magnétique. On cherche alors, en modifiant la fréquence de l'oscillateur, à maximiser la probabilité de transition. Lorsqu'elle est maximale, la fréquence de l'oscillateur est accordée à celle de la transition atomique. En effectuant une boucle d'asservissement, il est alors possible d'utiliser le signal de l'oscillateur comme une référence en fréquence.

Les éléments de matrice du Hamiltonien d'interaction  $H_1$  entre le champ magnétique et l'atome sont

$$\begin{aligned} \langle f | H_1 | f \rangle &= \langle e | H_1 | e \rangle = 0 \\ \langle f | H_1 | e \rangle &= \langle e | H_1 | f \rangle = \hbar\Omega \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

avec  $\Omega = -\chi B_0$ .

29. Donner les dimensions et unités de la quantité  $\chi$ . Donner les noms de quantités physiques représentées par  $\chi$  et  $\Omega$ .

**Solution:**  $\chi$  est le facteur gyromagnétique.  $\Omega$  est la pulsation de Larmor donnant la vitesse angulaire de la précession de Larmor. L'unité de  $\chi$  est  $T^{-1}\cdot s^{-1}$  ou  $C\cdot kg^{-1}$  et ses dimensions par rapport au S.I. sont  $[I][T][M]^{-1}$ .

30. Déterminer le Hamiltonien  $H'$  d'un atome en interaction avec le champ magnétique. En déduire l'équation d'évolution associée pour un atome dans l'état  $|\eta(t)\rangle$ .

**Solution:**  $H' = H_0 + H_1$   
 $H' |\eta(t)\rangle = i\hbar \frac{d|\eta(t)\rangle}{dt}$

On pose

$$|\phi(t)\rangle = \exp\left(\frac{iE_f t}{\hbar}\right) |\eta(t)\rangle$$

avec  $|\phi(t)\rangle = g_f(t) |f\rangle + g_e(t) \exp(-i\omega_0 t) |e\rangle$ .

31. A partir de l'équation d'évolution, déterminer les deux équations différentielles couplées du premier ordre que satisfont  $g_e(t)$  et  $g_f(t)$ .

**Solution:**

$$\begin{cases} i \frac{dg_f}{dt} = \Omega \cos(\omega t + \alpha) g_e \exp(-i\omega_0 t) \\ i \frac{dg_e}{dt} = \Omega \cos(\omega t + \alpha) g_f \exp(+i\omega_0 t) \end{cases} \quad (1)$$

32.  $\omega$  étant assez proche de  $\omega_0$ , il est possible de se placer désormais dans l'approximation du champ tournant. Cette approximation consiste à considérer que, à l'échelle de temps de la mesure, les termes périodiques de pulsation  $(\omega + \omega_0)$  ont un effet moyen négligeable par rapport à ceux de pulsation  $\delta = \omega - \omega_0$ . Ecrire les équations précédentes dans le cadre de l'approximation du champ tournant.

**Solution:**

$$\begin{cases} i \frac{dg_f}{dt} = \frac{\Omega}{2} \exp(i\alpha) g_e \exp(i(\omega - \omega_0)t) \\ i \frac{dg_e}{dt} = \frac{\Omega}{2} \exp(-i\alpha) g_f \exp(-i(\omega - \omega_0)t) \end{cases} \quad (2)$$

33. Déterminer l'équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par  $g_f$ , ainsi que celle satisfaite par  $g_e$ .

$$\begin{aligned} \text{Solution: } \frac{d^2 g_f}{dt^2} &= -\frac{\Omega^2}{4} g_f + i(\omega - \omega_0) \frac{dg_f}{dt} \\ \frac{d^2 g_e}{dt^2} &= -\frac{\Omega^2}{4} g_e - i(\omega - \omega_0) \frac{dg_e}{dt} \end{aligned}$$

34. Dans le cas général où l'atome se trouve dans l'état  $|\phi(0)\rangle = g_f(0) |f\rangle + g_e(0) |e\rangle$  à l'instant  $t = 0$ , montrer que les solutions de ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} g_f(t) &= g_f(0) \exp\left(\frac{i\delta t}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) - i \frac{\delta}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \right] \\ &\quad - i g_e(0) \exp(i\alpha) \exp\left(\frac{i\delta t}{2}\right) \frac{\Omega}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \\ g_e(t) &= g_e(0) \exp\left(\frac{-i\delta t}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) + i \frac{\delta}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \right] \\ &\quad - i g_f(0) \exp(-i\alpha) \exp\left(\frac{-i\delta t}{2}\right) \frac{\Omega}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega' t}{2}\right) \end{aligned}$$

Donner l'expression de  $\Omega'$  en fonction des données du problème.

$$\begin{aligned} \text{Solution: } \delta &= \omega - \omega_0 \\ \Omega' &= \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \end{aligned}$$

35. Pour les besoins de la mesure, on sélectionne des atomes dans l'état fondamental  $|f\rangle$ . A  $t = 0$ , on déclenche le champ magnétique avec un déphasage nul  $\alpha = 0$ . Après un temps d'interaction  $t$  avec le champ magnétique, déterminer la probabilité  $P_e(t)$  de mesurer l'atome dans l'état excité  $|e\rangle$  à l'instant  $t$  (appelée aussi probabilité de transition) en fonction de  $\Omega$  et  $\delta$ .

**Solution:**  $P_e(t) = |g_e(t)|^2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega't}{2}\right) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \frac{1 - \cos(\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}t)}{2}$

36. Pour cette question, on suppose que  $\delta = 0$ . La probabilité de transition oscille alors en fonction du temps. Donner le nom de ces oscillations ainsi que leur pulsation. Déterminer les valeurs de  $t$  où cette probabilité est égale à 1, puis à  $1/2$ . Justifier les appellations respectives « impulsion  $\pi$  » et « impulsion  $\pi/2$  » pour les interactions aboutissant à ces deux probabilités.

**Solution:** Ce sont les oscillations de Rabi. La pulsation est égale à  $\Omega$ . On obtient une probabilité de 1 pour une interaction durant un temps  $t = \frac{\pi}{\Omega} + k\frac{2\pi}{\Omega}$  avec  $k$  entier. Il s'agit d'une impulsion telle que  $\Omega t = \pi$  d'où son nom. On obtient une probabilité de  $1/2$  pour une interaction durant un temps  $t = \frac{\pi}{2\Omega} + k\frac{\pi}{\Omega}$  avec  $k$  entier. Il s'agit alors d'une impulsion  $\Omega t = \pi/2$ .

37. Pour une pulsation  $\omega$  quelconque de l'oscillateur, déterminer le temps  $\tau_{\max}(\omega)$  d'interaction le plus court permettant d'obtenir le maximum  $P_{\max}(\omega)$  pour la probabilité de transition. En déduire l'expression de  $P_{\max}(\omega)$ .

**Solution:**  $\tau_{\max}(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{\Omega^2 + (\omega - \omega_0)^2}}$   
 $P_{\max}(\omega) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + (\omega - \omega_0)^2}$

38. Dans le cadre du fonctionnement d'une horloge atomique, l'objectif est de rechercher le maximum de  $P_{\max}(\omega)$  en fonction de  $\omega$ . Donner l'allure de la courbe  $P_{\max}(\omega)$ . Préciser sa valeur maximale ainsi que la valeur de  $\omega$  associée. Déterminer la largeur à mi-hauteur de la courbe en fonction de  $\Omega$ .

**Solution:** La courbe est une lorentzienne. La valeur maximale est 1, elle correspond au cas où  $\omega = \omega_0$ . La largeur à mi-hauteur vaut  $\Delta\omega = 2\Omega$ .

39. Justifier l'utilisation du terme de résonance pour cette expérience. Montrer qu'il est possible, par un asservissement adapté, de s'assurer que le signal émis par l'oscillateur correspond à la fréquence d'horloge de référence.

**Solution:** La courbe est une lorentzienne caractéristique d'une résonance. Les atomes ne réagissent à la présence du champ magnétique que lorsque la fréquence de l'oscillateur est proche de celle correspondant à la transition. Si l'on asservit le signal de l'oscillateur sur le maximum de la courbe de réponse, il a alors une fréquence très proche de la fréquence d'horloge.

40. On appelle  $\tau_{0\max}$  le temps d'interaction entre le champ magnétique et l'atome lorsque le système (oscillateur+atomes) est à la résonance. Donner la relation entre  $\tau_{0\max}$  et  $\Omega$ . Exprimer la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance en fonction de  $\tau_{0\max}$ . Décrire un protocole expérimental permettant d'obtenir une très bonne précision pour la mesure de cette horloge et préciser les limitations pour ce type de mesure.

**Solution:**  $\tau_{0\max} = \frac{\pi}{\Omega}$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_{0\max}}$$

Pour améliorer la précision de la mesure (et donc réduire la largeur à mi-hauteur), il faut augmenter le temps d'interaction entre le champ magnétique et les atomes. On peut anticiper deux limitations : les atomes ne peuvent pas être maintenus isolés pendant une longue durée et dans un espace restreint et le champ magnétique peut difficilement être maintenu constant sur une longue durée.

Pour des horloges atomiques de référence, il est possible de développer un dispositif plus complexe permettant d'atteindre de meilleures précisions. Ce dispositif consiste en un système interférométrique permettant d'obtenir des franges dites de Ramsey.

Le principe est le suivant :

- Les atomes sont initialement sélectionnés dans l'état fondamental  $|f\rangle$ .
  - A  $t = 0$ , ils interagissent avec le champ magnétique sous la forme d'une impulsion  $\pi/2$ . On appelle  $\tau$  le temps d'interaction correspondant.
  - A partir de  $t = \tau$ , le champ magnétique est coupé et les atomes évoluent librement pendant une durée  $T$ .
  - A  $t = \tau + T$ , le champ magnétique est rallumé et les atomes subissent une impulsion  $\pi/2$ .
- La mesure consiste en la détermination du maximum de probabilité de transition des atomes. Avec les notations précédentes, on a donc à  $t = 0$  :  $g_e(0) = 0$  ;  $g_f(0) = 1$  ;  $\alpha = 0$ .

41. En reprenant les résultats des questions précédentes, déterminer l'état des atomes  $|\eta(\tau)\rangle$  à la fin de la première interaction avec le champ magnétique pour  $t = \tau$ .

**Solution:**  $g_f(\tau) = \exp\left(\frac{i\delta\tau}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\Omega'\tau}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega'\tau}{2}\right)\right)$

$$g_e(\tau) = -\frac{i\Omega}{\Omega'} \sin\left(\frac{\Omega'\tau}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\delta\tau}{2}\right)$$

$$\text{Or } \Omega'\tau = \frac{\pi}{2}$$

$$g_f(\tau) = \exp\left(\frac{i\delta\tau}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\delta}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$g_e(\tau) = -\frac{i\Omega}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(-\frac{i\delta\tau}{2}\right)$$

$$|\eta(\tau)\rangle = \exp\left(-\frac{iE_f\tau}{\hbar}\right) (g_f(\tau) |f\rangle + \exp(-i\omega_0\tau)g_e(\tau) |e\rangle)$$

42. Déterminer l'état des atomes  $|\eta(\tau + T)\rangle$  après leur évolution libre sans champ magnétique pour  $t = \tau + T$ .

**Solution:**  $g_f(\tau + T) = \exp\left(\frac{-iE_f(\tau+T)}{\hbar}\right) \left\{ \exp\left(\frac{i\delta\tau}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\delta}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$

$$g_e(\tau + T) = \exp\left(\frac{-iE_e(\tau+T)}{\hbar}\right) \left\{ -\frac{i\Omega}{\Omega'} \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(-\frac{i\delta\tau}{2}\right) \right\}$$

$$|\eta(\tau + T)\rangle = g_f(\tau + T) |f\rangle + g_e(\tau + T) |e\rangle$$

43. Calculer  $g_e(2\tau + T)$ . On prendra en compte le fait qu'avant la deuxième impulsion  $\pi/2$ , le champ magnétique s'est déphasé pendant l'intervalle de temps  $(\tau + T)$ . Montrer que la probabilité de transition d'un atome  $P_e(2\tau + T)$  vers l'état excité après l'ensemble du dispositif s'écrit

$$P_e(2\tau + T) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \left[ \cos\left(\frac{\delta T}{2}\right) - \frac{\delta}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} \sin\left(\frac{\delta T}{2}\right) \right]^2$$

**Solution:**  $g_e(2\tau + T) =$

$$-\frac{i\Omega}{2\Omega'} \left[ \exp\left(\frac{-iE_e(\tau+T)}{\hbar}\right) \exp(-i\delta\tau)(1 + i\frac{\delta}{\Omega'}) + \exp\left(\frac{-iE_t(\tau+T)}{\hbar}\right) \exp(-i\omega(\tau + T)) (1 - i\frac{\delta}{\Omega'}) \right]$$

$$P_e(2\tau + T) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \left[ \cos\left(\frac{\delta T}{2}\right) - \frac{\delta}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} \sin\left(\frac{\delta T}{2}\right) \right]^2$$

44. Justifier l'appellation de « franges de Ramsey » pour ce résultat. Déterminer la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

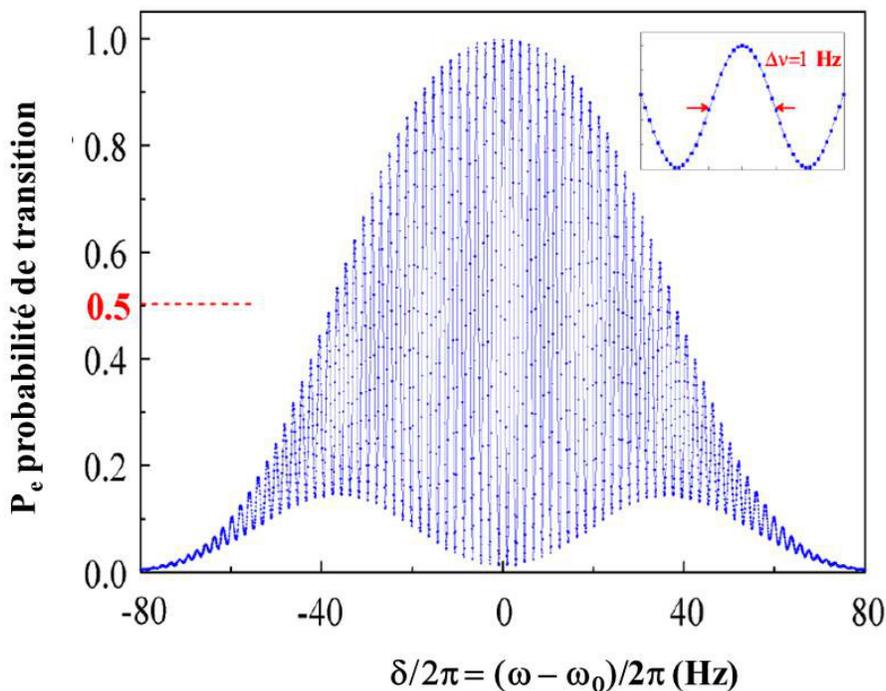


FIGURE 3 – Franges de Ramsey d'une horloge atomique. Le cadre en haut à droite est un zoom de la frange centrale de la figure où les flèches indiquent la largeur à mi-hauteur.

**Solution:** Le dispositif est un interféromètre, les oscillations sont donc bien des franges d'interférences. La largeur à mi-hauteur de la frange centrale est  $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$ .

45. La figure 3 représente le résultat d'une mesure effectuée sur une fontaine atomique dans un laboratoire de métrologie. Les points expérimentaux sont reportés sous la forme de disque donnant la barre d'erreur. On admet que chaque point a été obtenu avec un

temps de mesure correspondant au temps d'évolution libre des atomes,  $t_{\text{mes}} = T$ . Une courbe théorique est superposée aux points expérimentaux. Montrer que le résultat obtenu correspond aux calculs précédents en décrivant les caractéristiques principales de cette courbe. Comparer les résultats obtenus avec ce dispositif à la mesure de résonance précédemment étudiée.

**Solution:** L'enveloppe de la courbe est la lorentzienne obtenue avec la résonance des oscillations de Rabi. Les franges de Ramsey permettent donc d'obtenir une précision bien meilleure.

46. Au lieu de mesurer directement le maximum de la frange centrale, les métrologues préfèrent effectuer deux séries de mesures décalées en fréquence de part et d'autre de la frange centrale. Expliquer quelle est la motivation de ce protocole expérimental et déterminer le décalage en fréquence optimal.

**Solution:** Si l'on effectue les mesures de part et d'autre de la frange centrale à mi-hauteur, la probabilité de transition a alors une pente maximale. La mesure est alors bien plus sensible et donc plus précise que si l'on effectue la mesure au maximum de probabilité où la pente est horizontale.

47. La figure 4 montre la stabilité de deux types d'horloges : un oscillateur à quartz (tel qu'il peut y en avoir dans le récepteur) et une horloge atomique à Césium (telle qu'il peut y en avoir dans les satellites GPS ou au segment sol). La stabilité correspond à la détermination de la précision relative en fréquence de l'horloge étudiée en fonction du temps de mesure effectué.

Vérifier que les ordres de grandeurs présentés sont compatibles avec la courbe obtenue précédemment pour l'horloge atomique. Justifier l'utilisation d'un oscillateur à quartz pour le récepteur.

**Solution:** La courbe de franges de Ramsey donne une largeur à mi-hauteur de 1 Hz environ pour une fréquence de 10 GHz. On peut considérer que la mesure est plus sensible que cette largeur de raie d'un facteur 100 au moins étant donnée la largeur des points expérimentaux. Le temps de mesure pour une telle courbe correspond au temps de vol des atomes dans l'horloge, c'est-à-dire environ 1 s. C'est compatible avec la courbe donnée pour l'horloge à Césium.

La mesure de GPS usuelle entre le récepteur et le satellite ne dure pas plus qu'une seconde. Pour un tel temps de mesure, un oscillateur à quartz est aussi performant, voire meilleur en stabilité qu'une horloge à Césium pour un coût nettement moindre. Il est donc normal de mettre de telles horloges dans les récepteurs.

48. Pour les horloges atomiques de référence au sol, les laboratoires de métrologie emploient parfois des atomes de Césium froids comme étalon de fréquence. Décrire ce que signifie le terme « atomes froids » et déterminer les avantages d'une telle technologie pour le fonctionnement des horloges atomiques.

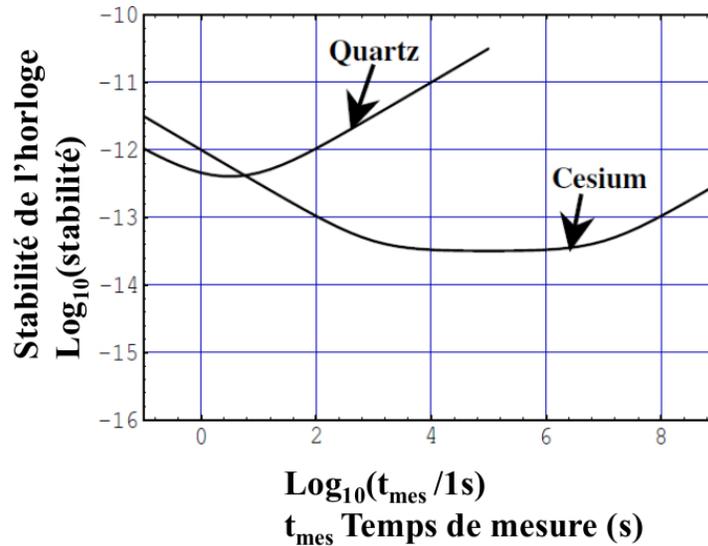


FIGURE 4 – Stabilité de l’horloge. La stabilité correspond à la précision relative de la mesure en fonction du temps de mesure.

**Solution:** Les atomes sont sous forme gazeuse à la température  $T_{\text{gaz}}$ . L’agitation thermique induit une dispersion de vitesse pour les atomes. La raie se retrouve élargie par effet Doppler (mais il n’y a pas de déplacement du maximum). La répartition des vitesses suit une statistique de Boltzmann. Si l’effet est prépondérant, la raie n’est plus lorentzienne, mais gaussienne (la situation intermédiaire donne un profil de Voigt). Il faut intégrer la statistique des vitesses sur la ligne de visée pour obtenir la largeur à mi-hauteur

$$\text{FWHM} = 2(\ln 2)^{1/2} \omega_0 \left( \frac{2k_B T_{\text{gaz}}}{m_C c^2} \right)^{1/2}$$

L’utilisation des atomes froids permettent d’éliminer l’effet Doppler. D’autre part, une dispersion de vitesses plus faible permet d’obtenir des vitesses de groupe plus faibles pour le paquet d’atomes et donc un temps d’interrogation  $T$  plus grand, c’est-à-dire une largeur de frange centrale plus faible. Par exemple, avec une température  $T_{\text{gaz}} = 10^{-6} K$ , l’effet Doppler diminue : on passe d’une largeur de raie de 10 kHz à 1 Hz et la dispersion de vitesse des atomes est réduite d’un facteur 100. Cela diminue d’autant la vitesse de groupe du paquet, augmente de même le temps d’interrogation, ce qui induit une raie 100 fois plus fine si l’effet Doppler est négligeable.

# Effets de l'atmosphère

Les satellites étant à une altitude d'environ 20180 km, les signaux émis traversent plusieurs couches de l'atmosphère terrestre. Le système GPS émet des signaux sur deux fréquences différentes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  décrites dans l'introduction.

Les perturbations induites par la traversée de l'atmosphère sont classées en deux catégories :  
- les perturbations issues de la composante ionisée de l'atmosphère (appelée, pour simplifier, l'ionosphère)

- les perturbations induites par la composante neutre de l'atmosphère (appelée, pour simplifier, du nom de sa couche la plus dense : la troposphère).

En dehors de l'atmosphère, on considère que les signaux se propagent dans le vide.

Les caractéristiques physiques de l'atmosphère (épaisseur, densité, composition, température, pression, ...) sont très variables sur toutes les échelles spatiales et sur des échelles de temps allant de la minute aux échelles géologiques en passant par les variations journalières et saisonnières. Il est donc indispensable pour le système GPS de développer des techniques permettant de passer outre ces variations.

## L'ionosphère

L'ionosphère est constituée d'un plasma qui s'étend environ à des altitudes de 50 km à 800 km. Le vent solaire est à l'origine d'une grande partie de l'ionisation de cette couche atmosphérique.

On suppose que l'ionosphère est composée d'un plasma homogène globalement neutre.

On veut étudier les conditions de propagation d'une onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique. On suppose qu'il s'agit d'une onde plane progressive harmonique transversale, polarisée rectilignement, se propageant suivant le vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ , de pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ , de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  correspondant à un champ électrique de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

avec  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  base orthonormée. Il règne alors dans le plasma un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  qui dépendent tous les deux a priori de la position et du temps.

49. On note à présent  $\vec{v}_e$  la vitesse des électrons dans le plasma et  $\vec{v}_i$  la vitesse des ions positifs. On modélise la réponse du plasma à la présence de l'onde par un modèle aboutissant aux relations

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$$
$$\vec{v}_i = \vec{0}$$

Décrire et justifier toutes les hypothèses sous-jacentes à ces résultats.

**Solution:** Ce modèle établit la relation fondamentale de la dynamique sur les porteurs de charge. La première hypothèse est que les ions restent immobiles et que seuls les électrons libres sont mobiles. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les ions ont une masse au moins mille fois plus grande que les électrons libres.

Dans ce modèle, il convient d'introduire toutes les forces agissant sur les électrons

- force issue du champ électrique : c'est celle restant dans l'équation finale
- l'interaction magnétique : pour une onde électromagnétique, elle est négligeable par rapport à la force issue du champ électrique.
- la force d'interaction avec l'environnement, proportionnelle à la vitesse : dans un plasma atmosphérique dilué, elle est négligeable par rapport à la force exercée par le champ électrique.

50. On appelle  $N_e$  la densité volumique électronique supposée uniforme. Déterminer, en précisant les conditions de son existence, l'équation de dispersion de l'onde dans l'ionosphère en fonction de  $N_e$  et des données du problème. Qu'appelle-t-on « pulsation plasma », notée  $\omega_p$  ? Donner son expression.

**Solution:**  $k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - \frac{\mu_0 N_e e^2}{m_e}$   
 $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$

51. Déterminer les conditions pour qu'une onde puisse se propager dans l'ionosphère.

**Solution:** Un signal électromagnétique peut traverser un plasma si sa fréquence est supérieure à la fréquence de plasma (ou de Langmuir). Cette limite est imposée par la relation de dispersion des ondes dans un milieu ionisé, issue des équations de Maxwell. Cette relation de dispersion n'a de sens (ou de solution) que si la pulsation du signal vérifie l'inégalité  $\omega > \omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$

52. La densité d'électrons  $N_e$  dans l'ionosphère varie usuellement de  $10 \text{ cm}^{-3}$  à  $10^6 \text{ cm}^{-3}$ . On suppose que ces variations se produisent sur des échelles de temps et d'espace suffisamment grandes pour que les équations précédentes restent valides. Déterminer la gamme de variation de la fréquence plasma  $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  de l'ionosphère. Démontrer que les fréquences émises par les satellites du système GPS peuvent se propager à travers l'ionosphère.

**Solution:** La densité maximale d'électrons dans l'ionosphère est de l'ordre de  $N_{\text{emax}} = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ . Prenons cette dernière pour calculer la fréquence plasma

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{12} (1,6 \times 10^{-19})^2}{(8,85 \times 10^{-12})(0,9 \times 10^{-30})}}$$

$$\nu_p \approx 10 \text{ MHz}$$

Quand la densité d'électrons est  $10^7$  fois plus faible, la fréquence plasma diminue

d'autant. Cette fréquence plasma, même dans le cas le plus extrême pour la densité électronique, est notablement inférieure aux fréquences du GPS. Les fréquences du GPS traversent donc l'ionosphère.

53. On se place dans la situation où l'onde se propage. Déterminer l'expression de la vitesse de phase  $v_\varphi$  et de la vitesse de groupe  $v_g$  de l'onde dans le plasma en fonction de la pulsation  $\omega$ , de la pulsation plasma  $\omega_p$  et des données du problème.

**Solution:**

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

54. En déduire que l'indice de réfraction  $n = \frac{c}{v_g}$  de l'ionosphère suit la relation au premier ordre en  $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$n = 1 + 40,3 \frac{N_e}{\nu^2}$$

pour des quantités exprimées en unités du système international.

Expliquer pourquoi cet indice de réfraction est celui utilisé pour le fonctionnement du GPS présenté en introduction.

**Solution:**  $n = \frac{c}{v_g} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$

$$n = 1 + \frac{N_e e^2}{8\epsilon_0 m_e \pi^2 \nu^2}$$

$$n = 1 + 40,3 \frac{N_e}{\nu^2}$$

Comme cela est dit en introduction, le satellite envoie des paquets d'onde. Il est donc nécessaire d'utiliser l'indice de groupe pour modéliser les effets de l'ionosphère et non pas l'indice lié à la vitesse de phase.

55. Déterminer l'erreur systématique induite par la présence de l'ionosphère sur la mesure de distance entre le satellite et le récepteur. Donner l'ordre de grandeur de la valeur supérieure que peut prendre cette erreur en supposant l'ionosphère homogène pour un signal à la fréquence  $\nu_1$ .

**Solution:** On a  $\ell_{ER} = c(t_R - t_E) = \ell_g + \int_E^R (n - 1) dl$

L'erreur introduite par la présence de l'ionosphère est donc

$$\Delta \ell_{iono} = \frac{40,3}{\nu^2} \int_E^R N_e dl$$

$$\Delta \ell_{iono} \approx 12 \text{ m}$$

56. En ne prenant pas en considération les autres sources d'erreur, écrire l'intérêt d'utiliser simultanément deux fréquences différentes pour le signal GPS. En particulier, donner une

combinaison des deux pseudo-distances  $\ell_1$  et  $\ell_2$  ainsi obtenues permettant de s'affranchir des effets ionosphériques quel que soit l'état de l'ionosphère traversée.

**Solution:**  $\int_E^R N_e dl$  est une quantité inconnue dont les fluctuations ne peuvent être prédites. Le fait d'utiliser deux fréquences différentes simultanément pour le signal GPS donne un système de deux équations indépendantes où les deux inconnues sont  $\ell_g$  et  $\int_E^R N_e dl$  où  $\ell_g$  est la distance géométrique.

(Pour le signal réel,  $\ell_g$  est la partie de la pseudo-distance qui comprend la distance géométrique à mesurer, mais aussi tous les autres effets sur le signal dont la dépendance en fréquence est différente de celle de l'ionosphère.)

$$\ell_1 = \ell_g + \frac{40,3}{\nu_1^2} \int_E^R N_e dl$$

$$\ell_2 = \ell_g + \frac{40,3}{\nu_2^2} \int_E^R N_e dl$$

Il existe donc une combinaison de ces deux signaux permettant de s'affranchir des effets ionosphériques

$$\ell_g = \frac{\ell_1 \nu_1^2 - \ell_2 \nu_2^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}$$

## La troposphère

La troposphère est un milieu neutre. L'interaction entre le signal émis par les satellites et la troposphère correspond à une interaction avec un milieu diélectrique. Seule la partie la plus dense de l'atmosphère participe à cette interaction. Pour ce problème, on considère qu'elle s'étend du sol jusqu'à une altitude de 50 km.

Cette couche de l'atmosphère est essentiellement constituée d'air plus ou moins humide suivant la situation météorologique. On rappelle les valeurs de pression et de température pour des conditions normales :  $P_n = 101\,325$  Pa et  $T_n = 273,15$  K.

Des expériences de communication radio dans la troposphère ont permis d'établir la relation empirique suivante pour l'indice de réfraction de la partie sèche de la troposphère

$$n_S - 1 = 77,6 \times 10^{-8} \left( \frac{P_S}{T'} \right)$$

où  $T'$  est la température de l'air exprimée en Kelvin et  $P_S$  est la pression partielle de l'atmosphère sèche exprimée en Pascal.

57. Calculer  $n_S - 1$  dans les conditions normales de température et de pression. En déduire l'écart en terme de positionnement que cette différence d'indice entraîne. Commenter.

**Solution:**  $n_S - 1 = 2,88 \times 10^{-4}$

Sur l'échelle de la troposphère (50 km), cela induit une erreur de positionnement de l'ordre de la dizaine de mètres ce qui est très important. Il faut estimer les effets de la troposphère avec un modèle plus précis pour bien prendre en compte les variations météorologiques.

On veut étudier plus précisément la réponse de la troposphère au passage du signal GPS. On considère la troposphère comme un gaz diélectrique dilué composé de molécules sans moment dipolaire ( $N_2$ ,  $O_2$ , gaz rares,  $CO_2$ ) et de molécules avec moment dipolaire ( $H_2O$ ). On va donc déterminer de façon indépendante le comportement de l'air sec et celui de la vapeur d'eau en supposant que les effets se superposent en s'additionnant. Par ailleurs, on suppose que l'air est un gaz parfait.

58. Donner la relation entre la permittivité diélectrique relative de l'air  $\epsilon_r$  et son indice de réfraction  $n'$ .

**Solution:**  $\sqrt{\epsilon_r} = n'$

59. La relation expérimentale donnant  $n_S$  propose une expression de la dépendance en température et en pression de l'indice de réfraction de la partie sèche de la troposphère. On souhaite retrouver cette dépendance par un modèle physique simplifié du gaz. La composante sèche de la troposphère est alors modélisée comme un gaz de molécules identiques ayant, au passage du signal GPS, un moment dipolaire induit  $\vec{p}$  tel que

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_1$$

où  $\alpha$  est la polarisabilité des molécules et  $\vec{E}_1$  est le champ électrique local vu par les molécules. La polarisabilité des molécules qui composent la partie sèche de l'air vaut approximativement  $\alpha \approx 20 \times 10^{-30} \epsilon_0$ .

On pose  $N$  le nombre de molécules par unité de volume. On suppose que le gaz est dilué, c'est-à-dire que le champ électrique local  $\vec{E}_1$  qui s'exerce sur une molécule est égal au champ macroscopique  $\vec{E}$  dans le gaz diélectrique au moment du passage du signal GPS (onde électromagnétique) dans le diélectrique.

Déterminer les hypothèses sous-jacentes à cette approximation, commenter l'ordre de grandeur donné pour la polarisabilité et vérifier la validité des hypothèses pour l'air dans des conditions normales de température et de pression.

**Solution:** Pour justifier cette approximation, il faut vérifier que le champ électrique produit par les molécules voisines de moment dipolaire  $\vec{p}$  à une distance  $d$  doit être négligeable devant  $\vec{E}$ . En posant  $E = \|\vec{E}\|$ , cela correspond à

$$\frac{\alpha E}{4\pi\epsilon_0 d^3} \ll E$$

où  $d$  est la distance moyenne entre les molécules.

Or  $\alpha \approx 4\pi a_0^3 \epsilon_0$  si on appelle  $a_0$  le rayon de la molécule, cela justifie approximativement la valeur donnée pour la polarisation.

L'inégalité ci-dessus revient alors à considérer que  $a_0 \ll d$ . Pour un gaz parfait à la pression de  $10^5$  Pa et à la température de 273 K, le nombre de molécules  $N$  par unité de volume est  $N = \frac{P}{k_B T}$  ce qui donne une distance moyenne entre molécules  $d = 3 \times 10^{-9}$  m, soit une dizaine de fois la taille d'une molécule pour la partie la plus dense de l'atmosphère. L'approximation est donc validée.

60. L'air est supposé être un milieu linéaire. Donner la relation entre la polarisabilité  $\alpha$  et la permittivité diélectrique relative de l'air sec  $\epsilon_S$  pour  $N$  molécules par unité de volume.

**Solution:**  $N \frac{\alpha}{\epsilon_0} = \epsilon_S - 1$

61. En déduire l'expression de l'indice de l'air sec en fonction de la température  $T'$  et de la pression partielle en air sec  $P_S$ . Vérifier que la relation obtenue est compatible en ordre de grandeur avec l'expression de  $n_S$  recommandée pour les communications radio.

**Solution:**  $\epsilon_S = N \frac{\alpha}{\epsilon_0} + 1$

Or, pour un gaz parfait, on a

$$N = \frac{P_S}{k_B T'}$$

$$\epsilon_S = \frac{P_S}{k_B T'} \frac{\alpha}{\epsilon_0} + 1$$

$$n_S = \sqrt{\epsilon_S} \approx 1 + \frac{\alpha P_S}{2 \epsilon_0 k_B T'}$$

Avec cette formule et la valeur de polarisabilité donnée, on obtient

$$n_S = 1 + 72 \times 10^{-8} \times \frac{P_S}{T'}$$

L'ordre de grandeur est correct et la forme de la dépendance en température et en pression est la bonne.

62. Pour l'indice de réfraction de la vapeur d'eau, les mêmes recommandations pour les communications radio donnent la relation

$$n_H = 1 + 72,0 \times 10^{-8} \times \frac{P_H}{T'} + 3,75 \times 10^{-3} \times \frac{P_H}{(T')^2}$$

avec  $P_H$  pression partielle de vapeur d'eau dans l'air.

Donner l'origine du terme supplémentaire en  $\frac{P_H}{(T')^2}$  et discuter qualitativement de sa dépendance en  $T'$ .

**Solution:** Le terme en  $\frac{P_H}{(T')^2}$  a pour origine le terme de polarisation d'orientation qui est déterminé par la distribution des orientations des moments dipolaires permanents de la molécule d'eau. Cette distribution suit une loi de Boltzmann d'où une dépendance en  $1/T'$  de la polarisation d'orientation.

On considère désormais que l'indice de réfraction total de l'air troposphérique s'écrit

$$n' = 1 + 77,6 \times 10^{-8} \times \frac{P_S}{T'} + 72,0 \times 10^{-8} \times \frac{P_H}{T'} + 3,75 \times 10^{-3} \times \frac{P_H}{(T')^2}$$

On pose ainsi

$$n' = 1 + \kappa_1 \frac{P_S}{T'} + \kappa_2 \frac{P_H}{T'} + \kappa_3 \frac{P_H}{(T')^2}$$

Il convient à présent de connaître l'évolution de la température et de la pression en fonction de l'altitude pour avoir un modèle thermodynamique complet de la troposphère.

La pression  $P'$  et la température  $T'$  de la troposphère sont déterminées à partir des hypothèses suivantes :

- l'air est un gaz parfait.
- la troposphère est en équilibre aérostatique en supposant que l'accélération de la pesanteur  $g$  reste constante à l'échelle de la troposphère.
- la température décroît linéairement avec l'altitude  $h$  (loi empirique)

$$T'(h) = T' = T'_0 - \xi h$$

où  $T'_0$  est la température de l'air au sol.

De la même façon, on note  $P'_0$  la pression troposphérique au sol et  $P' = P'(h)$  la pression à l'altitude  $h$ . On appelle  $M'$  la masse molaire de l'air composant la troposphère.

63. Déterminer la relation entre la pression  $P'$  et la température  $T'$  à l'altitude  $h$  sous la forme

$$P' T'^{-\beta} = \text{constante}$$

Donner l'expression de  $\beta$  en fonction de  $g$ ,  $M'$ ,  $\xi$  et la constante des gaz parfaits  $R$ . Comment appelle-t-on un tel modèle d'atmosphère ?

**Solution:** Si on appelle  $\rho$  la masse volumique de l'air à l'altitude  $h$ . On a

- loi des gaz parfaits  $P' = \frac{\rho R T'(h)}{M'}$
- équilibre aérostatique  $\frac{dP'}{dh} = -g\rho$

On a donc

$$\frac{dP'}{P'} = \frac{gM'}{\xi R} \frac{dT'}{T'}$$

$$\ln \left( \frac{P'}{P'_0} \right) = \ln \left( \frac{T'(h)}{T'_0} \right)^{\frac{gM'}{\xi R}}$$

$$\frac{P'}{P'_0} = \left( \frac{T'(h)}{T'_0} \right)^\beta$$

$$\text{avec } \beta = \frac{gM'}{\xi R}$$

Il s'agit d'un modèle polytropique de l'atmosphère.

64. La composition de l'atmosphère en partie sèche et partie humide est variable. Il faut donc introduire les contributions de ces deux parties. On note  $M_S$  la masse molaire de l'air sec et  $M_H$  la masse molaire de la vapeur d'eau présente dans l'atmosphère. On pose  $P_S = P_S(h)$  la pression partielle de la composante sèche de la troposphère et  $P_H = P_H(h)$  la pression partielle de la composante humide.

Montrer que l'on a la relation

$$\frac{dP'}{P'} = \frac{gM_S}{\xi R} \frac{dT'}{T'} - \frac{gM_S P_H}{\xi R P'_0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \frac{dT'}{T'}$$

**Solution:** Pour toute valeur de  $h$ , on a

$$P' = P_S + P_H \text{ et } M' = \frac{P_S M_S + P_H M_H}{P'}$$

Si on remplace ces relations dans l'équation différentielle

$$\frac{dP'}{P'} = \frac{gM'}{\xi R} \frac{dT'}{T'}$$

Et que l'on utilise la relation  $\frac{P'}{P'_0} = \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta$

On obtient directement

$$\frac{dP'}{P'} = \frac{gM_S}{\xi R} \frac{dT'}{T'} - \frac{gM_S P_H}{\xi R P'_0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \frac{dT'}{T'}$$

65. En plus de la mesure de la température et de la pression au sol, il est possible de mesurer l'humidité relative, c'est-à-dire le rapport entre la pression partielle en vapeur d'eau  $P_H$  et la pression de vapeur saturante  $\Pi$ . On suppose que ce rapport est constant sur la partie de la troposphère traversée par le signal GPS.

On montre que, dans ces conditions, la pression de vapeur saturante varie suivant l'expression

$$\frac{\Pi(h)}{\Pi(0)} = \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\sigma$$

avec  $\sigma > 3$ .

Que devient alors l'équation précédente ?

$$\textbf{Solution: } \frac{dP'}{P'} = \frac{gM_S}{\xi R} \frac{dT'}{T'} - \frac{gM_S P_{H0}}{\xi R P'_0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\sigma-\beta} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \frac{dT'}{T'}$$

66. La contribution de la vapeur d'eau dans la masse molaire de l'air est faible (moins de 5 pourcent). On peut donc faire l'approximation suivante

$$\beta \approx \frac{gM_S}{\xi R}$$

Ecrire et résoudre l'équation précédente avec cette approximation. Montrer que la solution prend la forme

$$\frac{P'}{P'_0} = \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta \exp(W)$$

en donnant l'expression de  $W$  en fonction de  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $T'$ ,  $T'_0$ ,  $\frac{M_H}{M_S}$  et  $\frac{P_{H0}}{P'_0}$ .

$$\textbf{Solution: } \frac{dP'}{P'} = \beta \frac{dT'}{T'} - \beta \frac{P_{H0}}{P'_0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\sigma-\beta} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \frac{dT'}{T'}$$

$$\ln\left(\frac{P'}{P'_0}\right) = \ln\left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta + \frac{\beta}{\sigma-\beta} \frac{P_{H0}}{P'_0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \left[1 - \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\sigma-\beta}\right]$$

$$\frac{P'}{P'_0} = \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta \exp(W)$$

$$\text{avec } W = \frac{\beta}{\sigma-\beta} \frac{P_{H0}}{P'_0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \left[1 - \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\sigma-\beta}\right]$$

67. Les mesures effectuées sur l'atmosphère montrent que  $W \leq 0,003$ . Effectuer un développement au premier ordre en  $W$  de l'exponentielle dans l'équation précédente.

$$\textbf{Solution: } \frac{P'}{P'_0} = \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta + \frac{\beta}{\sigma-\beta} \frac{P_{H0}}{P'_0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \left[\left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta - \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\sigma\right]$$

68. Dédire des équations établies précédemment l'expression de la pression partielle en vapeur d'eau  $P_H$  ainsi que la pression partielle en air sec  $P_S$  en fonction de l'altitude  $h$ , des caractéristiques de température, pression, pression partielle de vapeur d'eau de l'atmosphère au sol et des données du problème.

$$\textbf{Solution: } P_H = P_{H0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\sigma = P_{H0} \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\sigma$$

$$P_S = P' - P_H$$

$$P_S = P'_0 \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta + \frac{\beta}{\sigma-\beta} P_{H0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \left[\left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\beta - \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\sigma\right] - P_{H0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^\sigma$$

$$P_S = P'_0 \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\beta + \frac{\beta}{\sigma-\beta} P_{H0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \left[\left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\beta - \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\sigma\right] - P_{H0} \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\sigma$$

$$P_S = P'_0 \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\beta + \frac{\beta}{\sigma-\beta} P_{H0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\beta - \frac{1}{\sigma-\beta} P_{H0} \left(\sigma - \frac{M_H}{M_S} \beta\right) \left(\frac{T'_0 - \xi h}{T'_0}\right)^\sigma$$

69. Montrer qu'il est possible de déduire des résultats précédents l'expression de l'effet de la troposphère  $\Delta \ell_{\text{tropo}}$  sur la mesure de la pseudo-distance par le récepteur GPS lorsque le satellite passe à la verticale en fonction des caractéristiques de l'atmosphère au sol et de l'épaisseur  $h_{\text{tropo}}$  de la troposphère. Le calcul de l'intégrale n'est pas demandé.

$$\textbf{Solution: } \text{On a}$$

$$\Delta \ell_{\text{tropo}} = \int_0^{h_{\text{tropo}}} (n' - 1) dh = \int_E^R (n' - 1) dh = \int_0^{h_{\text{tropo}}} \left( \kappa_1 \frac{P_S}{T'} + \kappa_2 \frac{P_H}{T'} + \kappa_3 \frac{P_H}{(T')^2} \right) dh$$

$$\text{avec } \kappa_1 \frac{P_S}{T'} = \kappa_1 P'_0 \frac{(T'_0 - \xi h)^{\beta-1}}{(T'_0)^\beta} + \kappa_1 \frac{\beta}{\sigma-\beta} P_{H0} \left(1 - \frac{M_H}{M_S}\right) \frac{(T'_0 - \xi h)^{\beta-1}}{(T'_0)^\beta}$$

$$- \kappa_1 \frac{1}{\sigma-\beta} P_{H0} \left(\sigma - \frac{M_H}{M_S} \beta\right) \frac{(T'_0 - \xi h)^{\sigma-1}}{(T'_0)^\sigma}$$

$$\kappa_2 \frac{P_H}{T'} = \kappa_2 P_{H0} \frac{(T'_0 - \xi h)^{\sigma-1}}{(T'_0)^\sigma}$$

$$\kappa_3 \frac{P_H}{T'} = \kappa_3 P_{H0} \frac{(T'_0 - \xi h)^{\sigma-2}}{(T'_0)^\sigma}$$

## Bilan d'erreurs du GPS

La table 1 présente le bilan typique de l'incertitude quadratique issue de chaque élément participant à la mesure de la pseudo-distance pour le positionnement pour un récepteur ne détectant qu'une fréquence. La ligne « réflexions multiples » décrit le bruit de mesure induit par la réflexion des signaux GPS sur les objets environnant le récepteur.

Source de bruit	Incertitude en m
Horloges des satellites	2
Ephémérides	2,5
Ionosphère	5
Troposphère	0,5
Réflexions multiples	1
Récepteur	3

TABLE 1 – Bilan d'erreur typique d'une mesure de positionnement avec un récepteur monofréquence

70. On suppose que les différentes sources de bruit sont indépendantes. Déterminer l'incertitude quadratique globale en mètre de l'ensemble du système pour un récepteur monofréquence, puis pour un récepteur captant les deux fréquences. Conclure et proposer des techniques pouvant permettre d'améliorer ces performances.

**Solution:** Pour un récepteur monofréquence

$$\Delta_{\text{mono}} = \sqrt{2^2 + 2,5^2 + 5^2 + 0,5^2 + 1^2 + 3^2} = 6,7 \text{ m}$$

Pour un récepteur à 2 fréquences, la contribution de l'ionosphère disparaît

$$\Delta_{\text{bi}} = \sqrt{2^2 + 2,5^2 + 0,5^2 + 1^2 + 3^2} = 4,5 \text{ m}$$

Ce niveau d'incertitude est compatible avec une utilisation courante de localisation en voiture ou à pied, mais pour un usage scientifique (géosciences), pour piloter des tracteurs dans les champs, pour localiser des individus, etc., on peut utiliser les techniques de GPS différentiel.